Self Study Partner Sherpa

정답과 해설

셀파 해법수학 개념 기본서

수학 I

1. 행렬과 그 연산

개념 강화 드릴 ①

본문 7쪽

01 (1) 행의 수 : 2, 열의 수 : 1
(2) 행의 수 : 2, 열의 수 : 2
(3) 행의 수 : 2, 열의 수 : 3
(4) 행의 수 : 3, 열의 수 : 2

02 $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$이므로
(1) 행렬 A의 $(1, 2)$ 성분은 5
(2) 행렬 A의 $(1, 3)$ 성분은 7
(3) 행렬 A의 $(2, 1)$ 성분은 2
(4) 행렬 A의 $(2, 3)$ 성분은 6

03 $a_{ij}=ij$이므로
$a_{12}=1\times2=2$
$a_{21}=2\times1=2$

04 두 행렬이 서로 같으려면 두 행렬의 대응하는 위치에 있는 성분이 각각 같아야 한다.
(1) $x=4$, $y=-2$
(2) $x=3$, $x+y=2$에서 $y=-1$
(3) $y=2$, $x-y=4$에서 $x=6$

05 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$에서

(1) $A+B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3+1 & -1+3\\ 4-2 & 2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

(2) $A-B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3-1 & -1-3\\ 4-(-2) & 2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

(3) $2A=2\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times3 & 2\times(-1)\\ 2\times4 & 2\times2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 8 & 4\end{pmatrix}$

(4) $-3B=-3\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\times1 & -3\times3\\ -3\times(-2) & -3\times1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-3 & -9\\ 6 & -3\end{pmatrix}$

(5) $2A+B=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 8 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}6+1 & -2+3\\ 8-2 & 4+1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 6 & 5\end{pmatrix}$

(6) $A-3B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -9\\ 6 & -3\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3-3 & -1+(-9)\\ 4+6 & 2+(-3)\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}0 & -10\\ 10 & -1\end{pmatrix}$

06 $A+2X=X+2B$에서 X를 A와 B로 나타내면
$X=-A+2B$ …… ㉠
$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$을 ㉠에 대입하면
$X=-\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-8 & 5\\ -5 & -3\end{pmatrix}$

07

$A+B$	C	$(A+B)+C$
❶ $\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & 8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$	❷ $\begin{pmatrix}2 & 7\\ 3 & 12\end{pmatrix}$

A	$B+C$	$A+(B+C)$
$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$	❸ $\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 8\end{pmatrix}$	❹ $\begin{pmatrix}2 & 7\\ 3 & 12\end{pmatrix}$

❶ $A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-2) & 2+3\\ 3+1 & 4+4\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & 8\end{pmatrix}$

❷ $(A+B)+C=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-1+3 & 5+2\\ 4+(-1) & 8+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 3 & 12\end{pmatrix}$

❸ $B+C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-2+3 & 3+2\\ 1+(-1) & 4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 8\end{pmatrix}$

❹ $A+(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1 & 2+5\\ 3+0 & 4+8\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 3 & 12\end{pmatrix}$

따라서 $(A+B)+C=A+(B+C)$가 성립한다.

확인 문제 본문 8~13쪽

1-1 Action A는 3×2 행렬이므로 $A=(a_{ij})(i=1, 2, 3, j=1, 2)$로 나타낼 수 있다.

A는 3×2 행렬이므로 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다.

이때 $a_{ij}=i^2+j+2$에서

$a_{11}=1^2+1+2=4$, $a_{12}=1^2+2+2=5$

$a_{21}=2^2+1+2=7$, $a_{22}=2^2+2+2=8$

$a_{31}=3^2+1+2=12$, $a_{32}=3^2+2+2=13$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$

1-2 Action A는 2×3 행렬이므로 $A=(a_{ij})(i=1, 2, j=1, 2, 3)$로 나타낼 수 있다.

A는 2×3 행렬이므로 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$으로 나타낼 수 있다. 이때 $a_{ij}=\begin{cases} 2ij & (i\neq j) \\ 1 & (i=j) \end{cases}$에서

$a_{11}=1$, $a_{12}=2\times1\times2=4$, $a_{13}=2\times1\times3=6$,

$a_{21}=2\times2\times1=4$, $a_{22}=1$, $a_{23}=2\times2\times3=12$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}$

2-1 Action A는 3×3 행렬이므로 A를 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$으로 나타낸다.

a_{11}=(1지점에서 1지점으로 정보를 보내는 통신망의 수)=1

a_{12}=(1지점에서 2지점으로 정보를 보내는 통신망의 수)=2

a_{13}=(1지점에서 3지점으로 정보를 보내는 통신망의 수)=2

마찬가지 방법으로 행렬 A의 다른 성분을 구하면

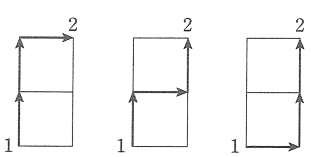
$a_{21}=0$, $a_{22}=0$, $a_{23}=3$,

$a_{31}=0$, $a_{32}=0$, $a_{33}=0$

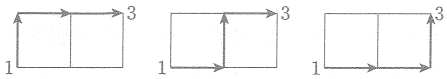
$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2-2 Action 1지점에서 2지점으로 가는 최단 경로의 수와 2지점에서 1지점으로 가는 최단 경로의 수는 같다.

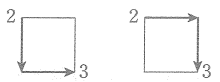
1지점에서 2지점으로 가는 최단 경로의 수는 아래 그림과 같이 3이다. $\therefore a_{12}=a_{21}=3$



1지점에서 3지점으로 가는 최단 경로의 수는 아래 그림과 같이 3이다. $\therefore a_{13}=a_{31}=3$



2지점에서 3지점으로 가는 최단 경로의 수는 아래 그림과 같이 2이다. $\therefore a_{23}=a_{32}=2$



또한 조건에서 $a_{ii}=0$이므로 $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3-1 Action 같은 위치에 있는 성분끼리 서로 같은 것을 이용하여 연립방정식을 세운다.

$\begin{pmatrix} x-y & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & x+z \\ 2x+y & 5 \end{pmatrix}$에서 같은 위치에 있는 성분끼리 서로 같아야 하므로

$x-y=5$ ····· ㉠

$x+z=1$ ····· ㉡

$2x+y=4$ ····· ㉢

㉠+㉢에서 $3x=9$ $\therefore x=3$

이 값을 ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$y=-2$, $z=-2$

3-2 Action 같은 위치에 있는 성분끼리 서로 같은 것을 이용하여 ab, bc, ca의 값을 구한다.

$\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ bc & 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab & 6 \\ 15 & ca \end{pmatrix}$에서 같은 위치에 있는 성분끼리 서로 같아야 하므로

$ab=12$ ····· ㉠

$bc=15$ ····· ㉡

$ca=20$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 곱하면 $(abc)^2=3600$

$\therefore abc=60(\because abc>0)$ ····· ㉣

㉠, ㉡, ㉢을 각각 ㉣에 대입하면

$a=4$, $b=3$, $c=5$

다른 풀이

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면 $ab^2c=180$ ····· ㉤

㉢을 ㉤에 대입하면

$20b^2=180$, $b^2=9$ $\therefore b=3(\because b>0)$

이 값을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$a=4$, $c=5$

쌤따 특강 확인 01 본문 11 쪽

작년에 세 과수원 P, Q, R에서 수확한 사과, 배의 수량을 나타낸 행렬을 A, 올해에 세 과수원 P, Q, R에서 수확한 사과, 배의 수량을 나타낸 행렬을 B라고 하면

$A=\begin{pmatrix}4&6\\3&4\\5&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&5\\4&4\\4&3\end{pmatrix}$

(1) $A+B=\begin{pmatrix}4&6\\3&4\\5&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&5\\4&4\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+5&6+5\\3+4&4+4\\5+4&2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{9}&\mathbf{11}\\\mathbf{7}&\mathbf{8}\\\mathbf{9}&\mathbf{5}\end{pmatrix}$

(2) $B-A=\begin{pmatrix}5&5\\4&4\\4&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&6\\3&4\\5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-4&5-6\\4-3&4-4\\4-5&3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\\-1&1\end{pmatrix}$

(3) $\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}9&11\\7&8\\9&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{2}&\frac{11}{2}\\\frac{7}{2}&4\\\frac{9}{2}&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

04-1 Action 주어진 식을 간단히 한다.

$2(A+B-C)+A-3B+4C$

$=2A+2B-2C+A-3B+4C$

$=3A-B+2C$

$=3\begin{pmatrix}3&-1\\1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2&-3\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9&-3\\3&-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-6\\2&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7&-2\\2&-9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-6\\2&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}11&-8\\4&-9\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$11+(-8)+4+(-9)=\mathbf{-2}$

04-2 Action 교환법칙과 분배법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 정리한다.

(1) $2B-X=X-(2A+4B)$에서

$2B-X=X-2A-4B$, 즉 $2X=2A+6B$이므로

$X=A+3B$

$=\begin{pmatrix}-1&0\\1&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3&1\\0&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&0\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&3\\0&-6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{8}&\mathbf{3}\\\mathbf{1}&\mathbf{-3}\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}-5&-1\\2&8\end{pmatrix}=xA+yB$에서

$\begin{pmatrix}-5&-1\\2&8\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}-1&0\\1&3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3&1\\0&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-x&0\\x&3x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3y&y\\0&-2y\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-x+3y&y\\x&3x-2y\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x=2$, $y=-1$

$\therefore \begin{pmatrix}-5&-1\\2&8\end{pmatrix}=\mathbf{2A-B}$

참고

x, y의 값을 바로 구하였더라도 $-x+3y=-5$, $3x-2y=8$의 식을 통하여 검산하도록 한다.

05-1 Action 주어진 두 식의 변끼리 더하여 행렬 A를 먼저 구한다.

$A-B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$ ……㉠

$2A+B=\begin{pmatrix}2&3\\1&-5\end{pmatrix}$ ……㉡

㉠+㉡에서

$3A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3\\1&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\0&-3\end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$

이 값을 ㉠에 대입하면

$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{-3}\end{pmatrix}$

05-2 Action $2X-Y=A$, $3X-2Y=B$로 놓고 두 식을 연립한다.

$A=\begin{pmatrix}-3&0\\-3&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-6&-1\\-5&10\end{pmatrix}$이라 하면

$2X-Y=A$ ……㉠

$3X-2Y=B$ ……㉡

$2\times$㉠$-$㉡에서 $X=2A-B$

$3\times$㉠$-2\times$㉡에서 $Y=3A-2B$

$\therefore X+Y=(2A-B)+(3A-2B)$

$=5A-3B$

$=5\begin{pmatrix}-3&0\\-3&6\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-6&-1\\-5&10\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-15&0\\-15&30\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}18&3\\15&-30\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{3}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$

개념 강화 드릴 ② 본문 15쪽

01 두 행렬 A, B에 대하여 A의 열의 개수와 B의 행의 개수가 같을 때, A, B의 곱 AB가 정의된다.

(1) AB (×)

∵ A의 열의 개수는 2, B의 행의 개수는 1

(2) BA (○)

∵ B의 열의 개수는 2, A의 행의 개수도 2

(3) AC (○)

∵ A의 열의 개수는 2, C의 행의 개수도 2

(4) CA (×)

∵ C의 열의 개수는 1, A의 행의 개수는 2

(5) BC (○)

∵ B의 열의 개수는 2, C의 행의 개수도 2

(6) CB (○)

∵ C의 열의 개수는 1, B의 행의 개수도 1

02 (1) $AB=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}(-2\ \ -1)$

$=\begin{pmatrix}3\times(-2) & 3\times(-1)\\ 2\times(-2) & 2\times(-1)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-6 & -3\\ -4 & -2\end{pmatrix}$

(2) $AB=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2\times3+3\times1 & -2\times(-1)+3\times2\\ 1\times3+4\times1 & 1\times(-1)+4\times2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3 & 8\\ 7 & 7\end{pmatrix}$

03 (1) $AB=(2\ \ -1)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$=(6-2)=(4)$

(2) $AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1-6\\3+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\9\end{pmatrix}$

(3) $AB=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4+0 & 6-1\\ 2+0 & 3+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

(4) $BA=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4+3 & -2+9\\ 0+1 & 0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 7\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

04 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1-3 & 3-6\\ -1+2 & -3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2+3 & -6+6\\ 1-1 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1+0 & 3+0\\ 0-1 & 0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

참고

$A^3=E$이므로 $A^4=A$, $A^5=A^2$, $A^6=E$, $A^7=A$, …이다.

05 (1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ (×)

∵ $(A+B)^2=(A+B)(A+B)$

$=A^2+AB+BA+B^2$

(2) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ (×)

∵ $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

(3) $(A+B)^3=A^3+3AB(A+B)+B^3$ (×)

∵ $(A+B)^3$

$=(A+B)(A+B)(A+B)$

$=(A^2+AB+BA+B^2)(A+B)$

$=A^3+A^2B+ABA+AB^2$

$+BA^2+BAB+B^2A+B^3$

(4) $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$ (×)

∵ $(A+B)(A^2-AB+B^2)$

$=A^3-A^2B+AB^2+BA^2-BAB+B^3$

(5) $A=O$ 또는 $B=O$일 때, $AB=O$ (○)

(6) [반례] $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$이면

$AB=O$이지만 $A\neq O$, $B\neq O$이다. (×)

(7) [반례] $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$이면

$A\neq O$, $AB=AC$이지만 $B\neq C$이다. (×)

06 단위행렬 E에 대하여 $E^n=E$(n은 자연수)가 성립하므로

(1) $E^2=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(2) $(-E)^2=E^2=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(3) $E^{50}=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(4) $(-E)^{99}=-E^{99}=-E=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

07 (1) $(A+E)^2=(A+E)(A+E)$
$=A^2+AE+EA+E^2$
$=A^2+2A+E$ (○)

(2) $(A+E)(A-E)=A^2-AE+EA-E^2$
$=A^2-E$ (○)

(3) $(A+E)^3=(A+E)(A+E)(A+E)$
$=(A^2+2A+E)(A+E)$
$=A^3+A^2E+2A^2+2AE+EA+E^2$
$=A^3+3A^2+3A+E$ (○)

(4) $(A+E)(A^2-A+E)$
$=A^3-A^2+AE+EA^2-EA+E^2$
$=A^3+E$ (○)

LECTURE 단위행렬과의 곱셈

일반적으로 행렬에서는 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않는다. 따라서 수와 식에서 성립하던 곱셈 공식, 인수분해 공식이 행렬에서는 성립하지 않는다. 하지만 단위행렬과의 곱셈은 교환법칙이 성립하므로 수와 식에서 성립하던 곱셈 공식과 인수분해 공식을 적용해서 사용해도 된다.

확인 문제 본문 17~26 쪽

06-1 Action 행렬의 곱셈을 한 후 같은 위치에 있는 성분끼리 서로 같음을 이용한다.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-y & 2x+2 \\ -4+2y & -4x-4 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 2-y & 2x+2 \\ -4+2y & -4x-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2-y=0$, $2x+2=0$, $-4+2y=0$, $-4x-4=0$

$\therefore$ $x=-1$, $y=2$

참고

이 문제에서 영행렬이 아닌 두 행렬 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$을 곱했더니 영행렬이 되었다. 이와 같이 영행렬이 아닌 두 행렬을 곱할 때 영행렬이 되는 두 행렬을 영인자라 한다.

이때 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이지만

$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -20 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$임을 주의한다.

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에서

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b+2 \\ 4-a & 2b+a \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 2 & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+2b & 4+ab \\ 1 & -2+a \end{pmatrix}$

이때 $AB=BA$이므로

$\begin{pmatrix} 0 & b+2 \\ 4-a & 2b+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+2b & 4+ab \\ 1 & -2+a \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2+2b=0$, $b+2=4+ab$, $4-a=1$, $2b+a=-2+a$

$\therefore$ $a=3$, $b=-1$

LECTURE 두 행렬이 서로 같을 때 미지수의 값 구하기

행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 얻은 식 중 계산이 가장 간편해 보이는 두 식을 택하여 a, b의 값을 구한다.
이때 구한 a, b의 값이 나머지 두 식도 만족시키는지 확인하면 계산 과정 중 발생할 수 있는 실수를 줄일 수 있다.

06-2 Action $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$를 이용한다.

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1 \\ 3 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab+3 & a+b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$ab=2$, $a+b=-3$

$\therefore$ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(-3)^3-3\times2\times(-3)$
$=-27+18=\mathbf{-9}$

07-1 Action 행렬의 곱셈의 분배법칙을 이용한다.

$A^2+AB-BA-B^2=A(A+B)-B(A+B)$
$=(A-B)(A+B)$

이때 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$에서

$A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$,

$A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$이므로

$\therefore$ $(A-B)(A+B)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A^2+AB-BA-B^2$의 모든 성분의 합은
$-3+2+(-12)+1=\mathbf{-12}$

교육청 기출

7-2 Action 주어진 조건에서 두 행렬 A, B를 구한다.

$A+B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ ····· ㉠

$A-B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ ····· ㉡

㉠+㉡에서 $2A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

㉠−㉡에서 $2B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -4 & -2\end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

$\therefore A^2-B^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -3\\ 6 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-4} & \mathbf{5}\end{pmatrix}$

오답 피하기

이 문제와 같이 $A+B$, $A-B$가 주어지고 행렬 A^2-B^2을 구하라는 문제는 익숙하게 곱셈 공식 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$를 이용하여 문제를 풀 확률이 높다. 그러나 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않으므로

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

와 같이 계산하지 않도록 주의한다.

따라서 $AB=BA$라는 조건이 없다면 단위행렬과의 곱셈이 아닌 임의의 행렬의 곱셈에서는 곱셈 공식 또는 인수분해 공식을 함부로 사용하지 않도록 한다.

8-1 Action A^2, A^3, A^4, …을 구하여 규칙을 찾는다.

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^3\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^4\end{pmatrix}$

·····

즉 $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1024\end{pmatrix}$에서

$2^n=1024=2^{10}$ $\therefore n=\mathbf{10}$

(2) $A^2+B^2+AB+BA=(A+B)^2$이므로

$(A+B)^2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore (A+B)^{1000}=\{(A+B)^2\}^{500}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{500}$

이때 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$,

·····

즉 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{500}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 500 & 1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 **502**

8-2 Action $A^n=E$가 되는 n의 값을 찾는다.

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{19}+A^{20}$

$=\underbrace{(A+E)+(A+E)+\cdots+(A+E)}_{10\text{개}}$

$=10(A+E)$

$=10\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

$=10\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{20} & \mathbf{20}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$

9-1 Action 인수분해 공식 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$을 이용한다.

$A^3-6A^2+12A-8E=(A-2E)^3$이다.

이때 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$에서

$A-2E=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$이므로

$(A-2E)^3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 -2

9-2 Action 행렬 X를 A와 E로 나타낸다.

$A+B=E$이므로 $X=2A+B=A+E$

$X^3=(A+E)^3=A^3+3A^2+3A+E$

이때 $A=AE$이고, $A+B=E$, $AB=O$이므로

$A=AE=A(A+B)=A^2+AB=A^2$

즉 $A^2=A$, $A^3=AA^2=AA=A^2=A$이므로

$X^3=A^3+3A^2+3A+E$

$=A+3A+3A+(A+B)$

$=8A+B$

$\therefore p=8$

10-1 Action 주어진 명제의 반례가 존재하는지 찾아본다.

(1) [반례] $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

즉 $AB=O$이지만 $BA\neq O$이다. (×)

(2) [반례] $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$이면

$A^2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

즉 $A^2=O$이지만 $A\neq O$이다. (×)

(3) [반례] $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}=A$

즉 $A\neq O$, $AB=A$이지만 $B\neq E$이다. (×)

(4) $A^nB=A\cdots AAB=A\cdots ABA$

$=A\cdots BAA=BA\cdots AA$

$=BA^n$ (○)

참고

$AB=BA$이면

$A^mB^n=B^nA^m$(단, m, n은 자연수)

셀파 특강 **확인 02** 본문 23쪽

1. (1) $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(2+3)A+(2\times3-0\times1)E=O$

$A^2-5A+6E=O$ $\therefore A^2=\mathbf{5A-6E}$

(2) $A=\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(4+1)A+\{4\times1-(-2)\times(-1)\}E=O$

$A^2-5A+2E=O$ $\therefore A^2=\mathbf{5A-2E}$

2. (1) $A=\begin{pmatrix}-3&-1\\5&2\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(-3+2)A+\{-3\times2-(-1)\times5\}E=O$

$A^2+A-E=O$ $\therefore A^2=-A+E$ …… ㉠

또한 $A^3=A^2A$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$A^3=(-A+E)A=-A^2+A$

$=-(-A+E)+A$

$=A-E+A=\mathbf{2A-E}$

(2) $A=\begin{pmatrix}-4&7\\-3&5\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(-4+5)A+\{-4\times5-7\times(-3)\}E=O$

$A^2-A+E=O$ $\therefore A^2=A-E$ …… ㉠

또한 $A^3=A^2A$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$A^3=(A-E)A=A^2-A$

$=A-E-A=\mathbf{-E}$

다른 풀이

(1) $A^2+A-E=O$에서 $A^2+A+E=2E$이다. 이때

$A^2+A+E=2E$의 양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=2E(A-E)$

$A^3-E=2A-2E$ $\therefore A^3=2A-E$

(2) $A^2-A+E=O$의 양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^3+E=O$ $\therefore A^3=-E$

11-1 Action 케일리-해밀턴의 정리를 이용한다.

$A=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-1\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(2-1)A+\{2\times(-1)-(-3)\times1\}E=O$

즉 $A^2-A+E=O$이고, 이 식의 양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^3+E=O$ $\therefore A^3=-E$

$\therefore A^{111}+A^{100}+A^{98}=(A^3)^{37}+(A^3)^{33}A+(A^3)^{32}A^2$

$=(-E)^{37}+(-E)^{33}A+(-E)^{32}A^2$

$=-E-A+A^2$

$=-E-A+A-E$

$=\mathbf{-2E}$

LECTURE **행렬의 거듭제곱의 차수를 낮추는 방법**

(1) A^2, A^3, A^4, …을 직접 구하여 $A^n=E$를 만족시키는 최소의 자연수 n을 찾은 후 차수를 낮춘다.

예 $A^3=E$이면 $A^{2010}=(A^3)^{670}=E^{670}=E$

(2) 케일리-해밀턴의 정리를 이용한다. 즉

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$일 때, $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

이므로 $A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$를 반복하여 사용하면 차수를 낮출 수 있다.

11-2 Action 케일리-해밀턴의 정리를 이용한다.

$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(1-2)A+\{1\times(-2)-(-3)\times1\}E=O$

즉 $A^2+A+E=O$이고, 이 식의 양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^3-E=O \quad \therefore A^3=E$

$\therefore A^{10}+A^9+A^8+\cdots+A+E$

$=(A^3)^3A+(A^3)^3+(A^3)^2A^2+\cdots+A+E$

$=A+E+(A^2+A+E)+(A^2+A+E)+(A^2+A+E)$

$=A+E$ ($A^2+A+E=O$)

셀파 특강 **확인 03** 본문 25 쪽

1. $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$에서 $A\neq kE$(k는 실수)이므로

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(a+b)A+(ab-1)E=O$

이 식이 $A^2+3A=4E$와 같으므로

$-(a+b)=3$, $ab-1=-4$에서 $a+b=-3$, $ab=-3$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-3)^2-2\times(-3)$

$=9+6=\mathbf{15}$

2. (i) $A\neq kE$(k는 실수)일 때

케일리-해밀턴의 정리에 의하여 $a+d=-2$

(ii) $A=kE$(k는 실수)일 때

$A^2+2A-3E=O$에서

$(kE)^2+2kE-3E=O$, $(k^2+2k-3)E=O$

즉 $k^2+2k-3=0$이므로 $(k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

따라서 $A=-3E=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ 또는 $A=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

이므로 $a+d=-6$ 또는 $a+d=2$

(i), (ii)로부터 $a+d$의 최솟값은 $\mathbf{-6}$

LECTURE **케일리-해밀턴의 정리를 거꾸로 사용할 때**

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-pA+qE=O$(p, q는 실수)가 성립할 때, 행렬 A를 구해 보자.

케일리-해밀턴의 정리에 의해

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$…… ㉠가 성립한다.

또한 주어진 조건에 의해 $A^2-pA+qE=O$…… ㉡이므로

㉠−㉡에서

$\{p-(a+d)\}A-\{q-(ad-bc)\}E=O$

$\therefore \{p-(a+d)\}A=\{q-(ad-bc)\}E$

(i) $p-(a+d)\neq0$이면 $A=\dfrac{q-(ad-bc)}{p-(a+d)}E$

이때 $\dfrac{q-(ad-bc)}{p-(a+d)}=k$로 놓으면 $A=kE$이므로

$a=d=k$, $b=c=0$

즉 $\dfrac{q-k^2}{p-2k}=k$이므로 $q-k^2=pk-2k^2$

$\therefore k^2-pk+q=0$ …… ㉢

이차방정식 ㉢을 풀어 k의 값을 찾는다.

(ii) $p-(a+d)=0$이면 $q-(ad-bc)=0$이다.

즉 $p=a+d$이면 $q=ad-bc$

⇨ $A=kE$인 경우에는 (i)에서 이차방정식 ㉢을 풀어 k의 값을 찾고, $A=kE$가 아닌 경우, 즉 $A\neq kE$인 경우에는 (ii)와 같이 케일리-해밀턴의 정리를 사용할 수 있다.

따라서 $A^2-pA+qE=O$(p, q는 실수)가 성립하는 행렬 A를 구할 때는, 즉 케일리-해밀턴의 정리를 거꾸로 사용할 때는 주어진 행렬이 단위행렬의 실수배일 때와 아닐 때로 경우를 나누어 풀어야 한다.

12-1 Action 곱셈으로 표현된 식에서 반복되는 수들을 찾아낸다.

A세트에는 햄버거 3개와 콜라 2개가 필요한데 햄버거는 1000원, 콜라는 500원이므로 A세트를 구성하는 데 필요한 구매 비용은 $3\times1000+2\times500$ …… ㉠

B세트에는 햄버거 5개와 콜라 3개가 필요한데 햄버거는 1000원, 콜라는 500원이므로 B세트를 구성하는 데 필요한 구매 비용은 $5\times1000+3\times500$ …… ㉡

㉠, ㉡을 행렬을 이용하여 나타내면 $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1000\\ 500\end{pmatrix}$

이때 A세트 50개와 B세트 40개가 필요하므로 전체 세트를 만드는 데 필요한 총 구매 비용을 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix}50 & 40\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1000\\ 500\end{pmatrix}$

다른 풀이

A세트에는 1000원인 햄버거 3개와 500원인 콜라 2개가 필요하므로 A세트를 구성하는 데 필요한 구매 비용은

$1000\times3+500\times2$ …… ㉠

B세트에는 1000원인 햄버거 5개와 500원인 콜라 3개가 필요하므로 B세트를 구성하는 데 필요한 구매 비용은

$1000\times5+500\times3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 행렬을 이용하여 나타내면 $\begin{pmatrix}1000 & 500\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

이때 A세트는 50개, B세트는 40개가 필요하므로 전체 세트를 만드는 데 필요한 총 구매 비용을 나타내는 행렬식은

$\begin{pmatrix}1000 & 500\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50\\ 40\end{pmatrix}$

확인 04

본문 27 쪽

(1) 행렬 $\begin{pmatrix} 3a+2c \\ 9b-3d \end{pmatrix}$를 $3\begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2c \\ -3d \end{pmatrix}$로 나누면

$\begin{pmatrix} 3a+2c \\ 9b-3d \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2c \\ -3d \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 2c \\ -3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a+2c \\ 9b-3d \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix}$

이 식의 양변의 왼쪽에 각각 행렬 A를 곱하면

$A\begin{pmatrix} 2c \\ -3d \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 3a+2c \\ 9b-3d \end{pmatrix}-3A\begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$으로 놓으면

$2p-q=-3$ ····· ㉠

$-p+3q=-1$ ····· ㉡

㉠+2×㉡에서 $5q=-5$ $\therefore q=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $p=-2$

$\therefore \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

이 식의 양변의 왼쪽에 각각 행렬 A를 곱하면

$A\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}=-2A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$=-2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

기본강화

본문 28~29 쪽

01 Action 행렬을 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$으로 나타낸다.

$a_{ij}=\begin{cases} i+2 & (i>j) \\ 3i-1 & (i=j) \\ a_{ji} & (i<j) \end{cases}$에서

$a_{11}=3\times1-1=2$, $a_{12}=a_{21}=2+2=4$, $a_{13}=a_{31}=3+2=5$

$a_{22}=3\times2-1=5$, $a_{23}=a_{32}=3+2=5$, $a_{33}=3\times3-1=8$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

LECTURE 행렬의 성분

행렬 $A=(a_{ij})(i=1, 2, 3, j=1, 2, 3)$에서

❶ $i=j$인 성분 ⇨ 색칠한 대각선의 성분

❷ $i>j$인 성분 ⇨ 대각선의 왼쪽 아래의 성분

❸ $i<j$인 성분 ⇨ 대각선의 오른쪽 위의 성분

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

02 Action 각 지점에서 다른 지점으로 직접 갈 수 있는 길의 수를 세어 본다.

a_{11}=(1에서 1로 직접 갈 수 있는 길의 수) ⇨ 0

a_{12}=(1에서 2로 직접 갈 수 있는 길의 수) ⇨ 2

a_{13}=(1에서 3으로 직접 갈 수 있는 길의 수) ⇨ 2

이와 같은 방법으로 하면

$a_{21}=0$, $a_{22}=1$, $a_{23}=1$

$a_{31}=1$, $a_{32}=0$, $a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

03 Action 서로 같은 행렬에서 같은 위치에 있는 성분끼리 서로 같음을 이용하여 a, b의 값을 먼저 구한다.

$\begin{pmatrix} ax^2-x & 3 \\ 2b+1 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & a+4 \\ b-1 & x^2+bx \end{pmatrix}$에서

행렬이 서로 같을 조건으로부터

$ax^2-x=-6$ ····· ㉠

$a+4=3$ ····· ㉡

$2b+1=b-1$ ····· ㉢

$x^2+bx=15$ ····· ㉣

㉡에서 $a=-1$이고, 이 값을 ㉠에 대입하면

$-x^2-x=-6$, $x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ ····· ㉤

㉢에서 $b=-2$이고, 이 값을 ㉣에 대입하면

$x^2-2x=15$, $x^2-2x-15=0$, $(x+3)(x-5)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$ ····· ㉥

따라서 ㉤, ㉥을 동시에 만족시키는 x의 값은 -3

04 Action 주어진 식을 X에 대한 식으로 정리한 다음 A, B를 대입한다.

$3\{X-(A-2B)\}=X+A+4B$에서

$3X-3A+6B=X+A+4B$

즉 $2X=4A-2B$이므로

$X=2A-B$

$=2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

주의

주어진 식을 정리하지 않고 행렬부터 대입하면 식이 상당히 복잡해진다.

05 Action $mA+nB=C$에 주어진 세 행렬을 대입하여 m, n의 값을 먼저 구한다.

$m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & x\\ y & 0\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}m & 0\\ 3m & -2m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2n & n\\ 0 & -n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & x\\ y & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}m+2n & n\\ 3m & -2m-n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & x\\ y & 0\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건으로부터

$m+2n=3$ ····· ㉠

$-2m-n=0$ ····· ㉡

㉠$+2\times$㉡에서 $-3m=3$ $\therefore m=-1$

이 값을 ㉡에 대입하면 $n=2$

따라서 $x=n=2$, $y=3m=-3$이므로

$\boldsymbol{x=2,\ y=-3}$

06 Action 세 식을 연립하여 하나의 미지수를 먼저 소거한다.

$3X+2Y+Z=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ ····· ㉠

$X-Y-Z=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -6 & 3\end{pmatrix}$ ····· ㉡

$2X+3Y+Z=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ ····· ㉢

㉠+㉡에서

$4X+Y=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4\\ -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -4 & 2\end{pmatrix}$ ····· ㉣

㉠−㉢에서

$X-Y=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ ····· ㉤

㉣+㉤에서

$5X=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -5 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

또한 ㉡에서

$Y+Z=X-\begin{pmatrix}1 & 4\\ -6 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 4\\ -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

$\therefore X+Y+Z=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -3\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{-2}\\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-3}\end{pmatrix}$

참고

$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=A$, $\begin{pmatrix}1 & 4\\ -6 & 3\end{pmatrix}=B$, $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}=C$로 놓고 $X+Y+Z$를 A, B, C에 대한 식으로 나타낸 후 풀어도 된다.

07 Action 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-4$

이때 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & -1\\ \beta & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2 & -\alpha-\beta\\ \alpha+\beta & -2\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta^2 & -\alpha-\beta\\ \alpha+\beta & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$에서 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a=\alpha^2+\beta^2$, $d=-2$

$\therefore a+d=\alpha^2+\beta^2-2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2$

$=2^2-2\times(-4)-2=\boldsymbol{10}$

교육청 기출

08 Action $A^n=kE$ 또는 $A^n=-kE$가 되는 n의 값을 찾는다.

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4E$

따라서 n이 4의 배수이면 $A^n=kE$를 만족시킨다.

이때 1000 이하의 자연수 중 4의 배수인 n의 개수는

$\frac{1000}{4}=\boldsymbol{250}$(개)

09 Action 주어진 명제의 반례를 찾아본다.

ㄱ. $(A-E)(A^2+A+E)$

$=A^3+A^2+A-A^2-A-E^2$

$=A^3-E$ (참)

ㄴ. [반례] $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$라고 하면

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2+2A+E=O$이지만 $A\neq-E$이다. (거짓)

ㄷ. $A+B=E$에서 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$A(A+B)=AE$이므로 $A^2+AB=A$ ····· ㉠

$A+B=E$에서 양변의 오른쪽에 A를 곱하면

$(A+B)A=EA$이므로 $A^2+BA=A$ ····· ㉡

㉠−㉡에서 $AB-BA=O$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄹ. [반례] $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$이라고 하면

$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

즉 $AB=O$, $B\neq O$이지만 $A\neq O$이다. (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

오답 피하기 영인자의 존재

$A^2+2A+E=O$이면 $(A+E)^2=O$가 성립하므로 $A=-E$라고 생각하기 쉽다. 그러나 행렬의 곱셈에서는 영인자가 존재하므로 다음을 항상 주의해야 한다.

❶ $AB=O$라고 해서 반드시 $A=O$ 또는 $B=O$인 것은 아니다.

⇨ 예 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$이면 $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이다.

❷ $A^2=O$라고 해서 반드시 $A=O$인 것은 아니다.

⇨ 예 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$이면 $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이다.

※ $A=O$이면 행렬 B에 관계없이 $AB=O$이고 $A^2=O$이다.

10 Action $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$를 만족시키면 $AB=BA$이다.

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$이므로

$-AB+BA=O$ $\therefore AB=BA$

$A=\begin{pmatrix}x^2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2y&1\\1&y^2\end{pmatrix}$에서

$AB=\begin{pmatrix}x^2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2y&1\\1&y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x^2y+1&x^2+y^2\\-2y+1&1+y^2\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}-2y&1\\1&y^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x^2y+1&-2y+1\\x^2+y^2&1+y^2\end{pmatrix}$

즉 $\begin{pmatrix}-2x^2y+1&x^2+y^2\\-2y+1&1+y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x^2y+1&-2y+1\\x^2+y^2&1+y^2\end{pmatrix}$이고,

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+y^2=-2y+1$

$\therefore x^2+(y+1)^2=2$

따라서 점 (x, y)는 중심의 좌표가 $(0, -1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원을 나타내므로 구하는 도형의 넓이는 2π

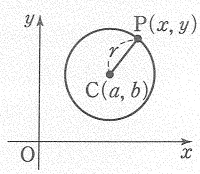
개념 다시보기 원의 방정식

중심이 C(a, b)이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

특히 중심이 원점, 즉 $(0, 0)$이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

⇨ $x^2+y^2=r^2$



11 Action 행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않고, 영인자가 존재한다.

$(X-E)(X+E)=O$를 전개하면

$X^2+XE-EX-E^2=O$ ····· ㉠

이때 $XE=EX$이고, $E^2=E$이므로

㉠은 X^2-E와 같다. 그러나 행렬의 곱셈에서는 영인자가 존재하기 때문에 $(X-E)(X+E)=O$라고 해도 $X=E$ 또는 $X=-E$라고 할 수 없다.

$(Y-4A)(Y+A)=O$를 전개하면

$Y^2+YA-4AY-4A^2=O$ ····· ㉡

이때 $YA\neq AY$이므로 ㉡은 $Y^2-3AY-4A^2=O$와 같다고 할 수 없다. 또 행렬의 곱셈에서는 영인자가 존재하므로 ㄹ도 성립하지 않는다.

따라서 옳지 않은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

12 Action $A\neq kE$(k는 실수)이므로 케일리-해밀턴의 정리를 이용한다.

$A=\begin{pmatrix}2&a\\-1&b\end{pmatrix}$에서 $A\neq kE$(k는 실수)이므로

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(2+b)A+(2b+a)E=O$ ····· ㉠

주어진 조건에서 $A^2-A-2E=O$ ····· ㉡

㉠-㉡에서 $(-1-b)A+(2b+a+2)E=O$

이때 $-1-b\neq 0$이면 $A=kE$(k는 실수)이어야 하는데 주어진 행렬 A는 단위행렬의 k배가 아니므로 $-1-b=0$이어야 한다.

즉 $-1-b=0$, $2b+a+2=0$이어야 하므로 $a=0$, $b=-1$

따라서 $A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-1\end{pmatrix}$이므로

$A^3-2A-E=A(A^2-2E)-E=AA-E$

$=A^2-E=A+2E-E=A+E$

$=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-1&0\end{pmatrix}$

참고

$A=\begin{pmatrix}2&a\\-1&b\end{pmatrix}$, 즉 단위행렬의 k배가 아님이 확실하므로 케일리-해밀턴의 정리의 역을 이용하면 ㉠과 ㉡이 같다는 것을 바로 보일 수 있다.

13 Action $A\neq kE$일 때와 $A=kE$일 때로 경우를 나누어 구한다.

(i) $A\neq kE$(k는 실수)일 때

케일리-해밀턴의 정리의 역에 의하여

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

이 식이 $A^2-5A+6E=O$와 같으므로

$ad-bc=6$

(ii) $A=kE$(k는 실수)일 때
$A^2-5A+6E=O$에서
$(kE)^2-5kE+6E=O$ $\therefore (k^2-5k+6)E=O$
즉 $k^2-5k+6=0$이므로
$(k-2)(k-3)=0$ $\therefore k=2$ 또는 $k=3$
따라서 $A=2E=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ 또는 $A=3E=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$이므로
$ad-bc=4$ 또는 $ad-bc=9$
(i), (ii)로부터 모든 $ad-bc$의 값의 합은
$6+4+9=\mathbf{19}$

14 Action 행렬의 곱셈을 한 후 행렬이 서로 같을 조건을 이용한다.

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$이므로

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$c=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}$, $d=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$
이때 $a_{21}b_{11}$은 지난 해 1월에서 6월 사이의 제품 P의 매출액,
$a_{22}b_{21}$은 지난 해 1월에서 6월 사이의 제품 Q의 매출액,
$a_{21}b_{12}$는 지난 해 7월에서 12월 사이의 제품 P의 매출액,
$a_{22}b_{22}$는 지난 해 7월에서 12월 사이의 제품 Q의 매출액을 의미한다.
따라서 $c+d$는 지난 해 C회사의 총 매출액을 나타낸다.

참고
c는 지난 해 1월에서 6월 사이의 C회사의 총 매출액을, d는 지난 해 7월에서 12월 사이의 C회사의 총 매출액을 나타낸다.

15 Action $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 A를 곱한다.

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에서 양변의 왼쪽에 A를 곱하면
$AA\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\therefore A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ …… ㉠
또한 $A^2+A-2E=O$에서 $A^2=-A+2E$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면

$$A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=(-A+2E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2E\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$\therefore \boldsymbol{a=0}, \boldsymbol{b=1}$

2. 역행렬과 연립일차방정식

개념 강화 드릴 ①

본문 31쪽

01 (1) $A(A+E)=E$에서 $A^{-1}=\boldsymbol{A+E}$
(2) $A(A-2E)=E$에서 $A^{-1}=\boldsymbol{A-2E}$
(3) $A^2-5A=E$에서 $A(A-5E)=E$
$\therefore A^{-1}=\boldsymbol{A-5E}$
(4) $A^2+3A=E$에서 $A(A+3E)=E$
$\therefore A^{-1}=\boldsymbol{A+3E}$

02 (1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&5\\2&-3\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\frac{1}{-3\times(-3)-5\times2}\begin{pmatrix}-3&-5\\-2&-3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-3&-5\\-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\2&3\end{pmatrix}$$

(2) $B^{-1}=\begin{pmatrix}3&5\\2&4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3\times4-5\times2}\begin{pmatrix}4&-5\\-2&3\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-5\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-\frac{5}{2}\\-1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

(3) $C^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1\times(-1)}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{-1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{-1}\end{pmatrix}$$

(4) $D^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\frac{1}{\cos^2\theta-(-\sin^2\theta)}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\cos\theta}&\boldsymbol{-\sin\theta}\\\boldsymbol{\sin\theta}&\boldsymbol{\cos\theta}\end{pmatrix}$$

($\cos^2\theta-(-\sin^2\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

03 (1) $A=\begin{pmatrix}2&3+x\\2&5\end{pmatrix}$가 역행렬을 가지지 않으려면
$2\times5-(3+x)\times2=0$, $10-6-2x=0$
$2x=4$ $\therefore x=\mathbf{2}$

(2) $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&-x\end{pmatrix}$가 역행렬을 가지지 않으려면
$1\times(-x)-2\times3=0$, $-x-6=0$ $\therefore x=\mathbf{-6}$

(3) $C=\begin{pmatrix}3&x-2\\1&2+x\end{pmatrix}$가 역행렬을 가지지 않으려면
$3\times(2+x)-(x-2)\times1=0$, $6+3x-x+2=0$
$2x=-8$ $\therefore x=\mathbf{-4}$

(4) $D=\begin{pmatrix}2x+2&3x\\2&4\end{pmatrix}$가 역행렬을 가지지 않으려면
$(2x+2)\times4-3x\times2=0$, $8x+8-6x=0$
$2x=-8$ $\therefore x=\mathbf{-4}$

04 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&-5\\-3&2\end{pmatrix}$에서

(1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6-5}\begin{pmatrix}2&-1\\-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{-1}\\\mathbf{-5}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$

$B^{-1}=\begin{pmatrix}7&-5\\-3&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{14-15}\begin{pmatrix}2&5\\3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2}&\mathbf{-5}\\\mathbf{-3}&\mathbf{-7}\end{pmatrix}$

(2) $AB=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&-5\\-3&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{18}&\mathbf{-13}\\\mathbf{29}&\mathbf{-21}\end{pmatrix}$

$(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}18&-13\\29&-21\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-378+377}\begin{pmatrix}-21&13\\-29&18\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{21}&\mathbf{-13}\\\mathbf{29}&\mathbf{-18}\end{pmatrix}$

(3) $A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-5\\-3&-7\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{-3}\\\mathbf{1}&\mathbf{4}\end{pmatrix}$

$B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-5\\-3&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-5&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{21}&\mathbf{-13}\\\mathbf{29}&\mathbf{-18}\end{pmatrix}$

(4) $(AB)^{-1}\neq A^{-1}B^{-1}$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

05 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix}1&8\\0&1\end{pmatrix}$, …

즉 $A^n=\begin{pmatrix}1&\mathbf{2n}\\0&1\end{pmatrix}$이므로

$(A^n)^{-1}=\begin{pmatrix}1&\mathbf{-2n}\\0&1\end{pmatrix}$ …… ㉠

또 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&\mathbf{-2}\\0&1\end{pmatrix}$에서 $(A^{-1})^2=\begin{pmatrix}1&-4\\0&1\end{pmatrix}$,

$(A^{-1})^3=\begin{pmatrix}1&-6\\0&1\end{pmatrix}$, $(A^{-1})^4=\begin{pmatrix}1&-8\\0&1\end{pmatrix}$, …이므로

$(A^{-1})^n=\begin{pmatrix}1&\mathbf{-2n}\\0&1\end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠, ㉡으로부터 $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$이 성립한다.

LECTURE **행렬의 거듭제곱**

행렬 $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\b&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&c\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}d&0\\0&1\end{pmatrix}$ 꼴의 거듭제곱은 다음과 같이 일정한 규칙을 가진다.

❶ $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&an\\0&1\end{pmatrix}$ ❷ $\begin{pmatrix}1&0\\b&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\bn&1\end{pmatrix}$

❸ $\begin{pmatrix}1&0\\0&c\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&c^n\end{pmatrix}$ ❹ $\begin{pmatrix}d&0\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}d^n&0\\0&1\end{pmatrix}$

실패 특강 **확인 01** 본문 32쪽

$A=\begin{pmatrix}-3&7\\-2&5\end{pmatrix}$에서 $(-3)\times5-7\times(-2)=-1\neq0$이므로

역행렬이 존재한다.

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&7\\-2&5\end{pmatrix}^{-1}=-\begin{pmatrix}5&-7\\2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-5}&\mathbf{7}\\\mathbf{-2}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}8&4\\-6&-3\end{pmatrix}$에서 $8\times(-3)-4\times(-6)=0$이므로

행렬 B는 역행렬이 존재하지 않는다.

$C=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}$에서 $5\times2-(-3)\times(-3)=1\neq0$이므로

역행렬이 존재한다.

$\therefore C^{-1}=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{3}&\mathbf{5}\end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix}4-2x&1\\11-6x&3\end{pmatrix}$에서 $(4-2x)\times3-(11-6x)=1\neq0$이므로

역행렬이 존재한다.

$\therefore D^{-1}=\begin{pmatrix}4-2x&1\\11-6x&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{-1}\\\mathbf{6x-11}&\mathbf{4-2x}\end{pmatrix}$

확인 문제 본문 33~41쪽

01-1 Action 행렬 $A-kB$를 성분으로 나타낸다.

$A=\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$에서

$A-kB=\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2-k&3\\-1+k&-2k\end{pmatrix}$

$A-kB$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$-2k(2-k)-3(-1+k)=0$

$-4k+2k^2+3-3k=0$, $2k^2-7k+3=0$

$(2k-1)(k-3)=0$ $\therefore k=\frac{1}{2}$ 또는 $k=3$

따라서 구하는 정수 k의 값은 **3**이다.

01-2 Action 행렬 A의 역행렬이 존재하므로 $ad-bc\neq0$이다.

행렬 $A=\begin{pmatrix}x&1-2x\\k&x\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하므로

$x^2-k(1-2x)\neq0$ $\therefore x^2+2kx-k\neq0$ …… ㉠

㉠이 임의의 실수 x에 대하여 성립하면

방정식 $x^2+2kx-k=0$의 실근이 존재하지 않으므로

이 방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2+k<0$, $k(k+1)<0$

$\therefore \mathbf{-1<k<0}$

2-1 Action $(A-E)B=E$이므로 $A-E$의 역행렬을 이용하여 B를 구한다.

$A=\begin{pmatrix}2&-2\\-5&12\end{pmatrix}$에서

$A-E=\begin{pmatrix}2&-2\\-5&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\-5&11\end{pmatrix}$

$(A-E)B=E$에서 $B=(A-E)^{-1}$이므로

$B=(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-5&11\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}11&2\\5&1\end{pmatrix}$

따라서 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&2\\5&1\end{pmatrix}$이므로 $a=11$, $d=1$

2-2 Action $A^2=O$의 양변에 $-E$를 더한다.

$A^2=O$의 양변에 $-E$를 더하면

$A^2-E=-E$

$(A+E)(A-E)=-E$

$-(A+E)(A-E)=E$

$(A+E)(-A+E)=E$

$\therefore (A+E)^{-1}=-A+E$

실력 특강 **확인 02** 본문 35 쪽

$A^2-A=E$에서 $A(A-E)=E$이므로 $A^{-1}=A-E$ ····· ㉠

또 $AB=4E$에서 $\frac{1}{4}AB=E$이므로 $A^{-1}=\frac{1}{4}B$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{4}B=A-E$, 즉 $B=4(A-E)$이므로

$B^2=16(A-E)^2=16(A^2-2A+E)$

$=16(A+E-2A+E)$

$=16(-A+2E)=-16A+32E$

다른 풀이

$E=A^2-A$를 $AB=4E$에 대입하면

$AB=4(A^2-A)=4A(A-E)$에서 $B=4(A-E)$

$\therefore B^2=16(A^2-2A+E)=-16A+32E$

3-1 Action 역행렬의 성질 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$를 이용한다.

$(AB)^{-1}(BA^{-1})^{-1}=B^{-1}A^{-1}(A^{-1})^{-1}B^{-1}$

$=B^{-1}A^{-1}AB^{-1}$

$=(B^{-1})^2$ ($A^{-1}A=E$)

이때 $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-3&2\end{pmatrix}$에서 $B^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-1\end{pmatrix}$이므로

$(B^{-1})^2=\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&3\\9&4\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 **23**

3-2 Action $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$를 이용한다.

주어진 조건에서 $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$이고,

역행렬의 성질에 의해 $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$이므로

$(AB)^{-1}=(BA)^{-1}$, 즉 $AB=BA$

$\begin{pmatrix}x&y\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\1&-2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x+2y&-x+3y\\-3&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1&y+2\\2x+3&2y-6\end{pmatrix}$

이때 행렬이 서로 같을 조건으로부터

$x+2y=x-1$, $-x+3y=y+2$,

$2x+3=-3$, $2y-6=-7$

$\therefore x=-3$, $y=-\frac{1}{2}$

참고

$x=-3$, $y=-\frac{1}{2}$을 $x+2y=x-1$, $-x+3y=y+2$에 대입하여 값을 확인해 본다.

4-1 Action $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$를 이용한다.

(1) $\left(\frac{1}{2}A\right)B=E$에서 $B^{-1}=\frac{1}{2}A$

이때 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$이므로

$B=(B^{-1})^{-1}=\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}=2A^{-1}$

$=2\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}^{-1}=2\times\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1&0\\-2&1\end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\4&-2\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$

·····

즉 $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$이므로

$A^{10}=\begin{pmatrix}1&10\\0&1\end{pmatrix}$

이때 $(A^{-1})^{10}=(A^{10})^{-1}=\begin{pmatrix}1&10\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-10\\0&1\end{pmatrix}$

$\therefore A^{10}+(A^{-1})^{10}=\begin{pmatrix}1&10\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-10\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

따라서 $A^{10}+(A^{-1})^{10}$의 모든 성분의 합은 **4**

4-2 Action $A^3=A^2A$를 이용한다.

$A^3=A^2A$에서 양변의 왼쪽에 $(A^2)^{-1}$를 곱하면

$(A^2)^{-1}A^3=(A^2)^{-1}A^2A \quad \therefore A=(A^2)^{-1}A^3$

이때 $A^2=\begin{pmatrix}3&-4\\-8&11\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}11&-15\\-30&41\end{pmatrix}$에서

$$A=\begin{pmatrix}3&-4\\-8&11\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}11&-15\\-30&41\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}11&4\\8&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&-15\\-30&41\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

셀파 특강 **확인 03** 본문 38 쪽

(1) $A=A^{-1}$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$AA=AA^{-1} \quad \therefore A^2=E$

$A=\begin{pmatrix}0&k\\3&0\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}0&k\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&k\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3k&0\\0&3k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{3}$

다른 풀이

$A=\begin{pmatrix}0&k\\3&0\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴의 정리로부터

$A^2-3kE=O$가 성립한다. 즉 $A^2=3kE$이고

주어진 조건에서 $A^2=E$이므로

$3k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{3}$

(2) $A+A^{-1}=O$에서 $A=-A^{-1}$이므로 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$AA=-AA^{-1} \quad \therefore A^2=-E$

$A=\begin{pmatrix}-3&k\\1&3\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}-3&k\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&k\\1&3\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}9+k&0\\0&k+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건으로부터

$9+k=-1 \quad \therefore k=-10$

다른 풀이

$A=\begin{pmatrix}-3&k\\1&3\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴의 정리로부터

$A^2-(9+k)E=O$가 성립한다. 즉 $A^2=(9+k)E$이고

주어진 조건에서 $A^2=-E$이므로

$9+k=-1 \quad \therefore k=-10$

수능 기출

5-1 Action $AX=B$이면 양변의 왼쪽에 A^{-1}를 곱한다.

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-2\end{pmatrix}$이고

행렬 A에서 $1\times5-2\times2=1\neq0$이므로 A^{-1}가 존재한다.

이때 $AX=B$의 양변의 왼쪽에 A^{-1}를 곱하면

$A^{-1}AX=A^{-1}B$

$\therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&-3\\1&-2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\1&-2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}8&-11\\-3&4\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$8+(-11)+(-3)+4=-2$

(2) $\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}X^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}$의 양변의 오른쪽에 X를 곱하면 $\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}X^{-1}X=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}X$

$\therefore \begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$

이 등식의 양변의 왼쪽에 $\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}$를 곱하면

$X=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\3&-4\end{pmatrix}$

5-2 Action 행렬 A의 역행렬이 존재하는지 먼저 확인한다.

$A=\begin{pmatrix}1&a\\-2&b\end{pmatrix}$에서

$1\times b-a\times(-2)=b+2a\neq0$ ($\because b\neq-2a$)

이므로 행렬 A의 역행렬 A^{-1}가 존재한다.

이때 $A^3=A$에서 양변의 왼쪽에 A^{-1}를 곱하면

$A^{-1}A^3=A^{-1}A \quad \therefore A^2=E$

$A^2=\begin{pmatrix}1&a\\-2&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\-2&b\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1-2a&a+ab\\-2-2b&-2a+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1-2a=1,\ -2-2b=0 \quad \therefore a=0,\ b=-1$

다른 풀이

$A=\begin{pmatrix}1&a\\-2&b\end{pmatrix}$이므로 케일리-해밀턴의 정리로부터

$A^2-(1+b)A+(b+2a)E=O$

이 식과 $A^2-E=O$를 비교하면

$1+b=0,\ b+2a=-1 \quad \therefore b=-1,\ a=0$

06-1 Action $A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$이면

$\Rightarrow A\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&r\\q&s\end{pmatrix}$

(1) $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$로부터

$A\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\3&1\end{pmatrix}$ ····· ㉠

이때 $2\times1-(-1)\times0=2\neq0$이므로 행렬 $\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재한다. 따라서 등식 ㉠의 양변의 오른쪽에 각각 $\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$를 곱하면

$A=\begin{pmatrix}-1&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\3&5\end{pmatrix}$

또한 $AX=E$에서 $X=A^{-1}$이므로

$X=\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\3&5\end{pmatrix}\right\}^{-1}=2\begin{pmatrix}-1&-1\\3&5\end{pmatrix}^{-1}$

$=2\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}5&1\\-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-5}&\mathbf{-1}\\\mathbf{3}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$

(2) $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ····· ㉠

의 양변의 왼쪽에 각각 A를 곱하면

$AA\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

이때 $A^2=E$이므로

$A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

즉 $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ····· ㉡

㉠, ㉡으로부터

$A\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}$ ····· ㉢

이때 $1\times1-(-1)\times2=3\neq0$이므로 행렬 $\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재한다. 따라서 등식 ㉢의 양변의 오른쪽에 각각 $\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}^{-1}$를 곱하면

$A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}^{-1}$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&0\\-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$

06-2 Action $A^2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2AA\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$를 이용하여 $A^2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$를 얻을 수 있다.

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ ····· ㉠이고, $A^2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$에서

$A^2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2AA\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ ····· ㉡

㉠, ㉡으로부터

$A\begin{pmatrix}1&4\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&3\end{pmatrix}$ ····· ㉢

이때 $1\times(-2)-4\times2=-10\neq0$이므로 행렬 $\begin{pmatrix}1&4\\2&-2\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재한다. 따라서 등식 ㉢의 양변의 오른쪽에 각각 $\begin{pmatrix}1&4\\2&-2\end{pmatrix}^{-1}$를 곱하면

$A=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&-2\end{pmatrix}^{-1}$

$=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-4\\-2&1\end{pmatrix}$

$=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}0&-10\\-4&7\end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1}\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}=\left\{-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}0&-10\\-4&7\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$

$=-10\times\frac{1}{-40}\begin{pmatrix}7&10\\4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}7&10\\4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}32\\24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{8}\\\mathbf{6}\end{pmatrix}$

07-1 Action $A=PBP^{-1}$에서 $A^3=PB^3P^{-1}$이다.

$A=PBP^{-1}$에서

$A^3=PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1}=PBBBP^{-1}=PB^3P^{-1}$

이때 $B=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}$에서

$B^3=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\0&1\end{pmatrix}$

$P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2-3}\begin{pmatrix}-1&-1\\-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}$

$\therefore A^3=PB^3P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-16&1\\24&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{-13}&\mathbf{-14}\\\mathbf{21}&\mathbf{22}\end{pmatrix}$

7-2 Action $P^{-1}AP=B$에서 양변의 왼쪽에 P를, 양변의 오른쪽에 P^{-1}를 곱한다.

$P^{-1}AP=B$에서 양변의 왼쪽에 P를, 양변의 오른쪽에 P^{-1}를 곱하면 $A=PBP^{-1}$이므로 $A^5=PB^5P^{-1}$

이때 $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$에서

$B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$이므로 $B^5=B$

$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore A^5=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$

실패특강 ○, × 문제 풀이 본문 42~43 쪽

1-(1) $A(A+E)=E$에서 $A^{-1}=A+E$

이때 $(A^{-1})^2=(A^2)^{-1}$이므로 A^2의 역행렬은

$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2=(A+E)^2$

$=A^2+2A+E$ (○)

1-(2) $A^2=AA=E$이므로 A의 역행렬이 존재한다. (○)

※ $A^2=E$이면 $A=A^{-1}$이다.

1-(3) A의 역행렬이 존재한다고 가정하면

$A^2=O$에서 $A^{-1}A^2=A^{-1}O$, 즉 $A=O$

그런데 O는 역행렬이 존재하지 않으므로 가정에 모순된다. (×)

1-(4) A의 역행렬이 존재한다고 가정하면

$A^3=O$에서 $A^{-1}A^3A^{-1}=A^{-1}OA^{-1}$, 즉 $A=O$

그런데 O는 역행렬이 존재하지 않으므로 가정에 모순된다. (×)

1-(5) $A^3=O$에서 $A^3+E=E$

$(A+E)(A^2-A+E)=E$

따라서 $A+E$의 역행렬은 A^2-A+E이다. (○)

1-(6) $A^3-3A^2+3A-5E=O$에서

$A^3-3A^2+3A=5E$, $A(A^2-3A+3E)=5E$

$\therefore A\left(\frac{1}{5}A^2-\frac{3}{5}A+\frac{3}{5}E\right)=E$

따라서 A의 역행렬은 $\frac{1}{5}A^2-\frac{3}{5}A+\frac{3}{5}E$이다. (○)

2-(1) $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$이므로 A^2의 역행렬이 존재하면 A의 역행렬도 존재한다. (○)

2-(2) [반례] $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$이면 A, B의 역행렬은 존재하지만 $A+B$, 즉 $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$은 역행렬이 존재하지 않는다. (×)

2-(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$이므로 A^{-1}, B^{-1}가 모두 존재해야 AB의 역행렬이 존재한다. (×)

3-(1) B의 역행렬이 존재한다고 가정하면

$AB=O$에서 $ABB^{-1}=OB^{-1}$, 즉 $A=O$

따라서 $A\neq O$인 가정에 모순이 되므로 B의 역행렬은 존재하지 않는다. (○)

3-(2) $AB=A$에서 $AB-A=O$, 즉 $A(B-E)=O$

$B-E$의 역행렬이 존재한다고 가정하면

$A(B-E)(B-E)^{-1}=O$, 즉 $A=O$

따라서 $A\neq O$인 가정에 모순이 되므로 $B-E$의 역행렬은 존재하지 않는다. (○)

3-(3) A의 역행렬이 존재한다고 가정하면

$A^2=A$에서 $A^2A^{-1}=AA^{-1}$, 즉 $A=E$

따라서 $A\neq E$인 가정에 모순이 되므로 A의 역행렬은 존재하지 않는다. (○)

3-(4) A, B의 역행렬이 모두 존재한다고 가정하면 $AB=O$에서 $A^{-1}ABB^{-1}=A^{-1}OB^{-1}$, 즉 $E=O$

따라서 $E=O$인 모순이 나타나므로 A와 B 중 적어도 하나는 역행렬이 존재하지 않는다. (○)

4-(1) $A^2=2A$에서

$A^2-2A=O$, $A^2-2A+E=E$

$\therefore (A-E)^2=E$

따라서 $A-E$의 역행렬은 $A-E$이다. (×)

4-(2) $A^3=E$에서 $AA^2=E$

따라서 A의 역행렬은 A^2이다. (○)

4-(3) $A^2=E$, $A^5=E$에서

$A^5=A^3A^2=A^3=A^2A=A=E$

즉 $A=E$이므로 A의 역행렬은 E이다. (○)

4-(4) $A^2+A+E=O$의 양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$ $\therefore A^3-E=O$

즉 $A^3=E$이므로

$A^3=A^2A=E$

따라서 A^2의 역행렬은 A이다. (○)

5-(1) A^{-1}가 존재하므로 $AB=O$에서
$A^{-1}AB=A^{-1}O \quad \therefore B=O$ (○)

5-(2) A^{-1}가 존재하므로 $AB=AC$에서
$A^{-1}AB=A^{-1}AC \quad \therefore B=C$ (○)

5-(3) A^{-1}가 존재하므로 $A^3=A$에서
$A^{-1}A^3=A^{-1}A,\ A^2=E,\ A^{-1}A^2=A^{-1}E$
$\therefore A=A^{-1}$ (○)

LECTURE **귀류법**

3-(1)~(4)에서는 결론을 부정하면 가정에 모순된다는 것을 이용해 명제가 참임을 증명하였다. 이와 같이 어떤 명제를 증명하는 방법을 귀류법이라 한다.



확인 04 본문 43쪽

(1) [반례] $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$이면 $A+B=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$의 역행렬은 존재하지만 A, B 모두 역행렬이 존재하지 않는다. (×)

(2) A, B 중 적어도 하나가 역행렬을 가진다고 가정하면
(i) A^{-1}가 존재할 때, $AB=O$에서 $A^{-1}AB=A^{-1}O$
$\therefore B=O$ (가정에 모순)
(ii) B^{-1}가 존재할 때, $AB=O$에서 $ABB^{-1}=OB^{-1}$
$\therefore A=O$ (가정에 모순)
따라서 $A\neq O$, $B\neq O$일 때, $AB=O$이면 A, B 모두 역행렬을 가지지 않는다. (○)

(3) $A^2-4A=E$에서 $A(A-4E)=E$
$\therefore A^{-1}=A-4E$ (○)

(4) [반례] $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이면 $A^2-A=O$이고 $A\neq E$이지만 A의 역행렬이 존재하지 않는다. (×)

(5) 주어진 명제의 대우는
"A, B 중 적어도 하나의 역행렬이 존재하지 않으면 BA의 역행렬이 존재하지 않는다."이다.
이때 $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$이므로 주어진 명제의 대우는 참이다.
따라서 BA의 역행렬이 존재하면 A, B 모두 역행렬이 존재한다. (○)

참고

(4) $A^2-A=O$이고 A의 역행렬이 존재한다고 하자.
$A^2=A$의 양변의 오른쪽에 A^{-1}를 곱하면
$A^2A^{-1}=AA^{-1} \quad \therefore A=E$
즉 $A^2-A=O$이고 A의 역행렬이 존재하면 $A=E$이다.

개념 강화 드릴 2 본문 45쪽

01 (1) $\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}0&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

(3) $\begin{cases}2x-3y=6\\-2x+3y=1\end{cases}$에서 $\begin{pmatrix}2&-3\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{cases}x+2y=-5\\x-2y=-3\end{cases}$에서 $\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$

02 (1) 행렬 $\begin{pmatrix}5&-2\\10&k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재해야 하므로
$5k-(-2)\times10\neq0,\ 5k\neq-20 \quad \therefore k\neq-4$

(2) 행렬 $\begin{pmatrix}5&k\\1&-3\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재해야 하므로
$5\times(-3)-k\neq0,\ -15-k\neq0 \quad \therefore k\neq-15$

(3) $\begin{cases}2x-3y=5\\kx-6y=7\end{cases}$에서 $\begin{pmatrix}2&-3\\k&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$
이때 행렬 $\begin{pmatrix}2&-3\\k&-6\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재해야 하므로
$2\times(-6)-(-3)\times k\neq0,\ 3k\neq12 \quad \therefore k\neq4$

(4) $\begin{cases}6x-9y=-3\\2x-ky=8\end{cases}$에서 $\begin{pmatrix}6&-9\\2&-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$
이때 행렬 $\begin{pmatrix}6&-9\\2&-k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재해야 하므로
$6\times(-k)-(-9)\times2\neq0,\ -6k\neq-18 \quad \therefore k\neq3$

03 연립일차방정식 $\begin{cases}2x-y=4\\x+y=5\end{cases}$를 행렬을 이용하여 나타내면
$\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$
이때 행렬 $\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하므로 이를 양변의 왼쪽에 곱하면
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$
$\therefore x=3,\ y=2$

04 연립일차방정식 $\begin{cases}-x+3y=2\\2x-6y=-4\end{cases}$를 행렬을 이용하여 나타내면
$\begin{pmatrix}-1&3\\2&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$
이때 행렬 $\begin{pmatrix}-1&3\\2&-6\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않고, 대응하는 계수의 비가 $\frac{-1}{2}=\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}$이므로 주어진 연립일차방정식의 해는 무수히 많다.

05 연립일차방정식 $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x-2y=3 \end{cases}$ 을 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

이때 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않고, 대응하는 계수의 비가 $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{4}{3}$이므로 주어진 연립일차방정식의 해는 없다.

06 (1) 행렬 $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$4a-(-2)\times 2=0,\ 4a=-4 \quad \therefore a=-1$

(2) 행렬 $\begin{pmatrix} -4 & a \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$-4\times(-4)-2a=0,\ -2a=-16 \quad \therefore a=8$

(3) $\begin{cases} x-ay=0 \\ -3x+9y=0 \end{cases}$ 에서 $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이때 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$9-(-a)\times(-3)=0,\ -3a=-9 \quad \therefore a=3$

(4) $\begin{cases} ax+8y=0 \\ -3x+12y=0 \end{cases}$ 에서 $\begin{pmatrix} a & 8 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이때 행렬 $\begin{pmatrix} a & 8 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$12a-8\times(-3)=0,\ 12a=-24 \quad \therefore a=-2$

확인 문제 본문 46~49 쪽

08-1 Action 연립일차방정식을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$로 나타낸다.

(1) 연립일차방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ 를 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ····· ㉠

이때 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하므로 ㉠의 양변의 왼쪽에 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$를 곱하면

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore x=1,\ y=1$

(2) 연립일차방정식 $\begin{cases} 3x=2 \\ 2x+5y=3 \end{cases}$ 을 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ····· ㉠

이때 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하므로 ㉠의 양변의 왼쪽에 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$를 곱하면

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\therefore x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}$

08-2 Action 연립일차방정식을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$로 나타낸다.

$\begin{cases} x\cos\theta+y\sin\theta=2 \\ -x\sin\theta+y\cos\theta=1 \end{cases}$ 에서

$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ····· ㉠

이때 행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하므로 ㉠의 양변의 왼쪽에 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$를 곱하면

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cos\theta-\sin\theta \\ 2\sin\theta+\cos\theta \end{pmatrix}$

따라서 $\alpha=2\cos\theta-\sin\theta,\ \beta=2\sin\theta+\cos\theta$이므로

$\alpha+\beta=3\cos\theta+\sin\theta$

09-1 Action 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & k \\ 2-k & -5 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는 경우를 구한다.

연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 3 & k \\ 2-k & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$의 해가 없을 때와 해가 무수히 많을 때는 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & k \\ 2-k & -5 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 때이므로

$3\times(-5)-k(2-k)=0,\ k^2-2k-15=0$

$(k+3)(k-5)=0 \quad \therefore k=-3$ 또는 $k=5$

(i) $k=-3$일 때, $\frac{3}{5}=\frac{-3}{-5}\neq\frac{-1}{1}$이므로 연립일차방정식의 해는 없다.

(ii) $k=5$일 때, $\frac{3}{-3}=\frac{5}{-5}=\frac{-1}{1}$이므로 연립일차방정식의 해는 무수히 많다.

9-2 Action 행렬 $\begin{pmatrix} a & a-2b \\ b-4 & 2a+b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는 경우를 구한다.

연립일차방정식 $\begin{pmatrix} a & a-2b \\ b-4 & 2a+b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$의 해가 존재하지 않으므로 $\frac{a}{b-4}=\frac{a-2b}{2a+b}\neq\frac{1}{2}$을 만족시켜야 한다.

이때 $\frac{a}{b-4}=\frac{a-2b}{2a+b}$로부터

$a(2a+b)-(a-2b)(b-4)=0$

$2a^2+ab-(ab-4a-2b^2+8b)=0$

$a^2+2a+b^2-4b=0$

$\therefore (a+1)^2+(b-2)^2=5$

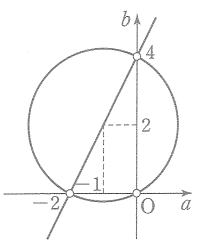
또 $\frac{a}{b-4}\neq\frac{1}{2}$로부터

$2a\neq b-4$, 즉 $b\neq 2a+4$이고,

$\frac{a-2b}{2a+b}\neq\frac{1}{2}$로부터

$2a-4b\neq 2a+b$, 즉 $b\neq 0$이다.

따라서 주어진 연립방정식의 해가 존재하지 않을 때, 점 (a, b)의 자취의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



10-1 Action 연립일차방정식이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가지려면 $ad-bc=0$이어야 한다.

연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 4-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가지므로 행렬 $\begin{pmatrix} 4-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다. 즉

$(4-k)(3-k)-2=0$, $k^2-7k+10=0$

$(k-2)(k-5)=0$ $\therefore k=2$ 또는 $k=5$

따라서 구하는 모든 k값의 합은 **7**

LECTURE **'$x=0, y=0$ 이외의 해를 가진다'의 표현**

x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 즉 $\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases}$이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가진다.

$\Longleftrightarrow$ 해가 무수히 많다.

$\Longleftrightarrow$ 원점을 지나는 두 직선이 일치한다.

$\Longleftrightarrow$ 두 직선의 기울기가 같다.

$\Longleftrightarrow$ 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.

$\Longleftrightarrow ad-bc=0$

10-2 Action 연립일차방정식을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 꼴로 만든다.

연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서

$k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=kE\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 2-k & 4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이 연립일차방정식이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가지므로 행렬 $\begin{pmatrix} 2-k & 4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다. 즉

$(2-k)(-1-k)-4=0$, $k^2-k-6=0$

$(k+2)(k-3)=0$ $\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

따라서 구하는 모든 k값의 곱은 **-6**

LECTURE **연립일차방정식을 행렬로 표현하기**

연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ …… ㉠을

$\begin{pmatrix} 2-k & 4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ …… ㉡으로 표현하기 어렵다면 ㉠을 $\begin{cases} 2x+4y=kx \\ x-y=ky \end{cases}$로 나타낸 후 이 식을 변형한 $\begin{cases} (2-k)x+4y=0 \\ x-(1+k)y=0 \end{cases}$에서 ㉡을 얻을 수 있다는 것을 기억하자.

11-1 Action 소금물의 양과 소금의 양을 기준으로 방정식을 세운다.

농도가 4 %인 소금물 x g과 농도가 10 %인 소금물 y g을 섞으면 농도가 6 %인 소금물 100 g이 된다.

이때 소금물의 양은 $x+y=100$ …… ㉠

또 소금물에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{4x}{100}+\frac{10y}{100}=\frac{6\times 100}{100}$ $\therefore 2x+5y=300$ …… ㉡

㉠, ㉡을 행렬을 이용하여 나타내면 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$

LECTURE **농도가 x %인 소금물 y g에 녹아 있는 소금의 양**

서로 다른 농도의 두 소금물을 섞어 다른 농도의 소금물을 만드는 것과 농도가 약한 소금물에서 물을 증발시켜 농도가 높은 소금물을 만들 때 증발시켜야 하는 물의 양, 또는 농도가 높은 소금물에 물을 섞어 농도가 약한 소금물을 만드는 문제를 해결하기 위해서는 문제의 조건 속에서 소금의 양을 구하는 것이 핵심이다. 소금의 양은 결코 변하지 않기 때문이다.

※ 농도 x %인 소금물 y g에 녹아 있는 소금의 양 ⇨ $\frac{x}{100}\times y$ (g)

평가원 기출

11-2 Action (연비)=$\frac{(\text{주행 거리})}{(\text{연료의 양})}$이므로 (연료의 양)=$\frac{(\text{주행 거리})}{(\text{연비})}$

시내의 A지점에서 출발하여 시내를 a_1 km 주행한 후 시외로 빠져나가 b_1 km 주행한 후 B지점에 도착할 때까지 연료가 40 L 들어갔다. 이때 시내에서의 연비는 x km/L이고, 시외에서의 연비는 y km/L이므로

$\frac{a_1}{x}+\frac{b_1}{y}=40$ ····· ㉠

또 B지점에서 출발하여 시외를 b_2 km 주행한 후 시내로 들어와 a_2 km 주행한 후 C지점에 도착할 때까지 연료가 50 L 들어갔다. 역시 시내에서의 연비는 x km/L이고, 시외에서의 연비는 y km/L이므로

$\frac{a_2}{x}+\frac{b_2}{y}=50$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}$, 즉 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$이다.

이때 주어진 조건에서 행렬 A의 역행렬이 존재하므로 위 등식의 양변의 왼쪽에 A^{-1}를 곱하면

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{pmatrix} 40b_2-50b_1 \\ -40a_2+50a_1 \end{pmatrix}$$

따라서 $\frac{1}{x}=\frac{40b_2-50b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$, $\frac{1}{y}=\frac{50a_1-40a_2}{a_1b_2-a_2b_1}$이므로

$\boldsymbol{x=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{40b_2-50b_1}}$, $y=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{50a_1-40a_2}$

기본 강화 본문 50~51쪽

01 Action 행렬 $A-xE$를 성분으로 나타낸다.

$A=\begin{pmatrix} k & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에서

$$A-xE=\begin{pmatrix} k & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} k & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} k-x & 9 \\ -1 & 1-x \end{pmatrix}$$

이때 $A-xE$의 역행렬이 존재하므로

$(k-x)(1-x)+9\neq0$

$\therefore x^2-(1+k)x+k+9\neq0$ ····· ㉠

㉠이 임의의 실수 x에 대하여 성립하려면

이차방정식 $x^2-(1+k)x+k+9=0$이 실근을 가지지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(1+k)^2-4(k+9)<0$에서

$k^2+2k+1-4k-36<0$, $k^2-2k-35<0$

$(k+5)(k-7)<0$ $\therefore \boldsymbol{-5<k<7}$

개념 다시보기 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 근은

❶ $D=b^2-4ac>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근

❷ $D=b^2-4ac=0 \Longleftrightarrow$ 중근

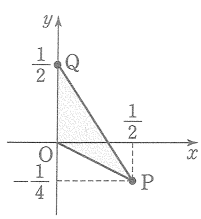
❸ $D=b^2-4ac<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근

02 Action A^{-1}의 각 성분을 좌표평면 위에 대응시킨다.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에서

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

이때 A^{-1}의 성분에서 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, $\mathrm{Q}\left(0, \frac{1}{2}\right)$이므로 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore S(A^{-1})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$

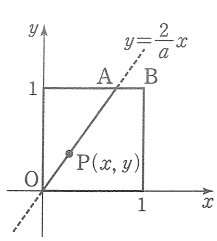
평가원 기출

03 Action 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에서 $ad-bc=0$이면 역행렬이 존재하지 않는다.

행렬 $\begin{pmatrix} a & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$ay-2x=0$ $\therefore y=\frac{2}{a}x$ ($a>0$) ····· ㉠

따라서 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 $0\le x\le1$, $0\le y\le1$이 나타내는 영역에 속하는 점이면서 직선 ㉠ 위의 점이므로 $f(a)$는 오른쪽 그림에서 선분 OA의 길이이다.



이때 $f(a)$의 최댓값은 점 A가 점 B의 위치에 있을 때이다. 즉 $a=2$일 때이므로 $f(a)$의 최댓값은 두 점 O(0, 0), B(1, 1)을 잇는 선분의 길이이다.

$\therefore \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

개념 다시보기 두 점 사이의 거리

(1) 수직선 위의 두 점 $P(x_1)$, $Q(x_2)$ 사이의 거리
⇨ $\overline{PQ}=|x_2-x_1|$

(2) 좌표평면 위의 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 사이의 거리
⇨ $\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

04 Action 행렬 X가 행렬 A의 역행렬이면 $AX=E$이다.

$A+E$의 역행렬이 $A-2E$이므로

$(A+E)(A-2E)=E$

$\therefore A^2-A-3E=O$

이 식의 양변에 $-3E$를 더하면

$A^2-A-6E=-3E$

$(A+2E)(A-3E)=-3E$

$(A+2E)\left\{-\frac{1}{3}(A-3E)\right\}=E$

$\therefore (A+2E)\left(-\frac{1}{3}A+E\right)=E$

따라서 행렬 $A+2E$의 역행렬은 $-\frac{1}{3}A+E$

LECTURE 역행렬 구하기

역행렬의 정의를 이용하여 $A+2E$의 역행렬을 구하기 위해서는 $A^2-A-3E=O$를 $(A+2E)\square=E$ 꼴로 변형해야 한다. 그런데 이 문제에서 주어진 식은 바로 $A+2E$를 인수로 가지도록 인수분해가 되지 않는다. 이와 같이 인수분해가 되지 않아 묶어낼 수 없을 때는 양변에 kE(k는 실수)를 더해서 좌변이 $A+2E$를 인수로 가지도록 만들어 주면 된다. 이때 $A^2-A-3E=O$에서 A의 계수가 -1임에 주의하여 k의 값을 찾아야 한다.

05 Action 주어진 식에 A를 곱하여 $AA^{-1}=E$를 이용한다.

$A=A^{-1}$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$AA=AA^{-1}$ $\quad\therefore A^2=E$

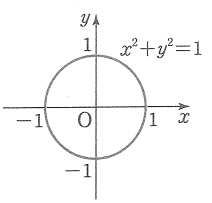
$A=\begin{pmatrix}-x & y\\ y & x\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}-x & y\\ y & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x & y\\ y & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+y^2 & 0\\ 0 & y^2+x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

이때 행렬이 서로 같을 조건으로부터

$x^2+y^2=1$

이 식은 중심이 $(0, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 나타내므로 점 (x, y)가 그리는 자취를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



06 Action $AX+BX=(A+B)X$를 이용한다.

$(A+B)X=AX+BX$이다. 이때 $A+B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$,

$AX=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 7 & -5\end{pmatrix}$, $BX=\begin{pmatrix}7 & -5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 7 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & -5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}10 & -7\\ 6 & -4\end{pmatrix}$ ····· ㉠

이때 $3\times0-(-1)\times2=2\neq0$이므로 행렬 $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재한다.

따라서 등식 ㉠의 양변의 왼쪽에 $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}^{-1}$를 곱하면

$X=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}10 & -7\\ 6 & -4\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & -7\\ 6 & -4\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & -4\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

07 Action $A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}z\\ u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix}$이면

$A\begin{pmatrix}x & z\\ y & u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & r\\ q & s\end{pmatrix}$이다.

$A\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$에서

$A\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

이때 역행렬의 정의에서 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 A^{-1}를 곱하면

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 5\end{pmatrix}$

$\therefore \boldsymbol{x=-1,\ y=5}$

다른 풀이

$\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$

$=A\begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}-3\\ 9\end{pmatrix}$

$=A\begin{pmatrix}-1\\ 5\end{pmatrix}$

$\therefore x=-1,\ y=5$

수능 기출

08 Action $(BA)^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 B^{-1}를, 양변의 오른쪽에 B를 곱한다.

$(BA)^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$에서 $(BA)^2=BABA$이므로

$BABA=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$에서 양변의 왼쪽에 B^{-1}를, 양변의 오른쪽에 B를 곱하면

$B^{-1}(BABA)B=B^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}B$

$ABAB=B^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}B$

이때 $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$에서 $B^{-1}=\frac{1}{1-0}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$

$\therefore (AB)^2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$

수능 기출

09 Action 역행렬의 정의와 역행렬의 성질을 이용한다.

ㄱ. $AB=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$에서 $a=b$이면

$ab-0=a^2>0$ ($\because a\neq 0$)

즉 AB의 역행렬이 존재하므로 A의 역행렬 A^{-1}도 존재한다. (참)

ㄴ. $AB=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$에서 $a=b$이면 $AB=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

즉 $AB=aE$이므로 $\frac{1}{a}AB=E$

따라서 $A^{-1}=\frac{1}{a}B$에서 $B=aA^{-1}$이므로

$BA=(aA^{-1})A=aE$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄷ. $AB=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 A^{-1}를 곱하면

$B=A^{-1}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$

이때 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$에서 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$이므로

$B=A^{-1}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\-a&b\end{pmatrix}$

따라서 $BA=\begin{pmatrix}a&0\\-a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\-a+b&b\end{pmatrix}$인데

이때 $a\neq b$이므로 $AB\neq BA$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고

ㄱ에서 'AB의 역행렬이 존재하면 A, B의 역행렬이 모두 존재한다.'를 증명해 보자. 이 명제의 대우는 'A, B 중 적어도 하나의 역행렬이 존재하지 않으면 AB의 역행렬이 존재하지 않는다.' 인데 이때 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$이므로 대우가 참이다.
따라서 AB의 역행렬이 존재하면 A의 역행렬이 존재한다.

10 Action 연립일차방정식 $\begin{cases}ax+by=-2\\cx+dy=5\end{cases}$를 행렬을 이용하여 나타낸다.

두 직선 $ax+by=-2$, $cx+dy=5$의 교점의 좌표는 연립일차방정식 $\begin{cases}ax+by=-2\\cx+dy=5\end{cases}$의 해와 같다.

이 연립일차방정식을 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ ····· ㉠

이때 주어진 조건에서 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$이므로

㉠의 양변의 왼쪽에 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}$를 곱하면

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(4, -1)$이다.

11 Action 연립일차방정식을 행렬을 이용하여 나타낸다.

연립일차방정식 $\begin{cases}(k+1)x+2y=3-k\\x+ky=1\end{cases}$을 행렬을 이용하여 나타내면 $\begin{pmatrix}k+1&2\\1&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-k\\1\end{pmatrix}$

이 연립일차방정식이 무수히 많은 해를 가지려면

행렬 $\begin{pmatrix}k+1&2\\1&k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$k(k+1)-2=0$, $k^2+k-2=0$

$(k+2)(k-1)=0$ $\therefore k=-2$ 또는 $k=1$

(i) $k=-2$일 때

주어진 연립방정식은 $\begin{cases}-x+2y=5\\x-2y=1\end{cases}$이므로

대응하는 계수의 비가 $\frac{-1}{1}=\frac{2}{-2}\neq\frac{5}{1}$이다.

따라서 주어진 연립일차방정식의 해는 없다.

(ii) $k=1$일 때

주어진 연립방정식은 $\begin{cases}2x+2y=2\\x+y=1\end{cases}$이므로

대응하는 계수의 비가 $\frac{2}{1}=\frac{2}{1}=\frac{2}{1}$이다.

따라서 주어진 연립일차방정식의 해는 무수히 많다.

(i), (ii)로부터 상수 k의 값은 1

다른 풀이

연립일차방정식 $\begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-k \\ 1 \end{pmatrix}$의 해가 무수히 많으므로 $\frac{k+1}{1}=\frac{2}{k}=\frac{3-k}{1}$를 만족시켜야 한다.

이때 $\frac{k+1}{1}=\frac{3-k}{1}$로부터

$k+1=3-k$, $2k=2$ $\therefore k=1$

따라서 구하는 상수 k의 값은 1

LECTURE 연립일차방정식과 두 직선 $ax+by=p$, $cx+dy=q$의 위치 관계

	$ad-bc\neq 0$	$ad-bc=0$	
행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	역행렬이 존재한다.	역행렬이 존재하지 않는다.	
두 직선의 위치 관계와 연립일차방정식의 해	$\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ $\Longleftrightarrow$ 두 직선이 한 점에서 만난다. $\Longleftrightarrow$ 한 쌍의 해를 가진다.	$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{p}{q}$ $\Longleftrightarrow$ 두 직선이 일치한다. $\Longleftrightarrow$ 해가 무수히 많다.	$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\neq\frac{p}{q}$ $\Longleftrightarrow$ 두 직선이 평행하다. $\Longleftrightarrow$ 해가 없다.
			

교육청 기출

12 Action ab의 값을 구하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$\begin{pmatrix} a-1 & -2 \\ 8 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a-1 & -2 \\ 8 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix} a-1 & -2 \\ 8 & b \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a & -2 \\ 8 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이 연립일차방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면

행렬 $\begin{pmatrix} a & -2 \\ 8 & -b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$-ab+16=0$ $\therefore ab=16$

이때 a, b가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}=2\sqrt{16}=8$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 $a+b$의 최솟값은 **8**

개념 다시보기 산술평균과 기하평균의 관계

a, b가 모두 양수일 때

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

13 Action $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 꼴로 나타낸 후에 $ad-bc=0$을 이용한다.

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-y \\ -3x+y \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a+1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a-2 & -b+1 \\ b+3 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이 연립일차방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면

행렬 $\begin{pmatrix} a-2 & -b+1 \\ b+3 & a \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$a(a-2)-(-b+1)(b+3)=0$

$a^2-2a+b^2+2b-3=0$

$\therefore (a-1)^2+(b+1)^2=5$

즉 점 (a, b)의 자취는 중심의 좌표가 $(1, -1)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원을 나타내므로 구하는 자취의 길이는 $2\sqrt{5}\pi$

교육청 기출

14 Action 먼저 주어진 조건을 연립일차방정식으로 나타낸다.

P약국에서는 혈압약이 3만 원, 관절염약이 1만 원이고,

Q약국에서는 혈압약이 2만 원, 관절염약이 2만 원이다.

갑은 매월 혈압약 1상자, 관절염약 1상자을 구입해야 하므로

갑의 1개월 동안의 약값은

P약국 : $3\times1+1\times1=4$(만 원)

Q약국 : $2\times1+2\times1=4$(만 원)

을은 매월 혈압약 2상자, 관절염약 3상자를 구입해야 하므로

을의 1개월 동안의 약값은

P약국 : $3\times2+1\times3=9$(만 원)

Q약국 : $2\times2+2\times3=10$(만 원)

갑이 x개월, 을이 y개월 동안 혈압약과 관절염약을 P약국에서 구입하면 갑과 을의 약값의 합이 60만 원이므로

$4x+9y=60$ ····· ㉠

또 갑이 x개월, 을이 y개월 동안 혈압약과 관절염약을 Q약국에서 구입하면 갑과 을의 약값의 합이 64만 원이므로

$4x+10y=64$ ····· ㉡

두 방정식 ㉠, ㉡을 연립한 연립일차방정식을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 60 \\ 64 \end{pmatrix}$ ← $4\times10-9\times4=4\neq0$이므로 역행렬이 존재한다.

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 60 \\ 64 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 64 \end{pmatrix}$

따라서 $a=10$, $b=4$이므로 $a+b=14$

3. 그래프와 행렬

개념 강화 드릴 본문 53 쪽

01 (1) (꼭짓점의 집합)={A, B, C, D}
(변의 집합)={AC, BC, BD}

(2) (꼭짓점의 집합)={A, B, C, D, E}
(변의 집합)={AB, AD, AE, BC, BE, CD, CE, DE}

(3) (꼭짓점의 집합)={A, B, C, D, E}
(변의 집합)={AB, AD, BC, CD, CE}

(4) (꼭짓점의 집합)={A, B, C, D}
(변의 집합)={AB, AC, AD, BC, BD, CD}

02 (1) 두 그래프는 꼭짓점이 4개, 변이 4개이고 꼭짓점끼리의 연결 상태가 같으므로 서로 같은 그래프이다. (○)

(2) 두 그래프는 꼭짓점이 6개, 변이 6개로 같지만 꼭짓점끼리의 연결 상태가 같지 않으므로 서로 같은 그래프가 아니다. (×)

(3) 두 그래프는 꼭짓점이 4개, 변이 4개이고 꼭짓점끼리의 연결 상태가 같으므로 서로 같은 그래프이다. (○)

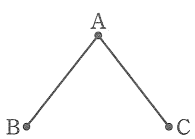
03 ABE, ABCE, ADCE, ADCBE

04 행렬의 성분은 두 꼭짓점 사이에 변이 있으면 1로, 변이 없으면 0으로 나타낸다.

(1)
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

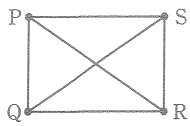
05 A, B, C에 대응하는 점을 찍고 A와 B, A와 C를 잇는 변을 그리면 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



확인 문제 본문 54~60 쪽

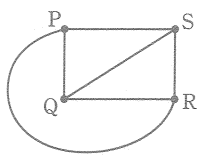
01-1 Action 주어진 꼭짓점을 평면 위에 나타내고 주어진 변에 맞추어 꼭짓점을 선으로 잇는다.

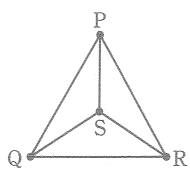
(1) 꼭짓점 P, Q, R, S를 평면 위에 적당히 나타낸 다음 꼭짓점 P와 Q, 꼭짓점 P와 R, 꼭짓점 P와 S, 꼭짓점 Q와 R, 꼭짓점 Q와 S, 꼭짓점 R와 S를 연결하면 오른쪽 그림과 같다.



다른 풀이

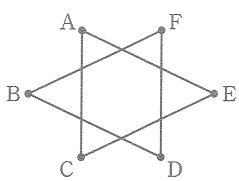
다음 그래프도 모양은 다르지만 같은 그래프이므로 답이 될 수 있다.





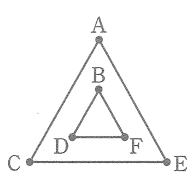
꼭짓점들이 연결된 상태만 같으면 같은 그래프이므로 그래프를 그리는 문제의 답은 무한히 많다. (**기본** 해법 02 참고)

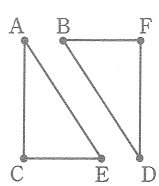
(2) 꼭짓점 A, B, C, D, E, F를 평면 위에 적당히 나타낸 다음 꼭짓점 A와 C, 꼭짓점 A와 E, 꼭짓점 B와 D, 꼭짓점 B와 F, 꼭짓점 C와 E, 꼭짓점 D와 F를 연결하면 오른쪽 그림과 같다.



다른 풀이

꼭짓점의 위치를 바꾸면 다음과 같은 그래프도 답이 될 수 있다.





셀파 특강 **확인 01** 본문 55 쪽

ㄱ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면 4, 4, 2, 2, 2이고 ㄴ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면 4, 3, 3, 2, 2이다.
따라서 두 그래프는 각 꼭짓점의 차수의 배열이 다르므로 두 그래프는 서로 같은 그래프가 아니다.

02-1 Action 그래프의 각 꼭짓점의 차수의 배열을 조사한다.

ㄱ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면 3, 3, 2, 2

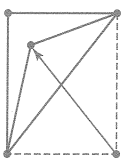
ㄴ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면 2, 2, 2, 2

ㄷ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면 2, 2, 2, 2

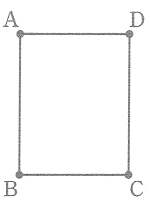
ㄹ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면 3, 3, 2, 2

그러므로 ㄱ, ㄹ은 ㄴ, ㄷ과 다른 그래프이다.

이때 ㄱ의 그래프에서 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점의 위치를 바꾸면 ㄹ의 그래프와 같게 된다.



또한 ㄴ의 그래프에서 오른쪽 그림과 같이 각 꼭짓점을 정한 다음 꼭짓점 B와 꼭짓점 C의 위치를 서로 바꾸면 ㄷ의 그래프와 같게 된다.



따라서 서로 같은 그래프는 ㄱ, ㄹ과 ㄴ, ㄷ이다.

02-2 Action 그래프의 각 꼭짓점의 차수의 배열을 조사한다.

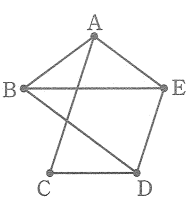
ㄱ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면 3, 3, 3, 3, 2

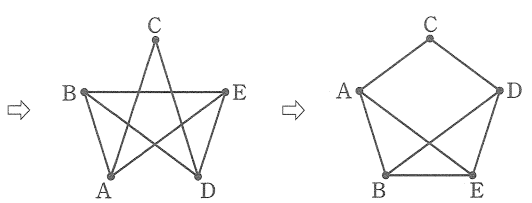
ㄴ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면 3, 3, 3, 3, 2

ㄷ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면 4, 3, 3, 2, 2

이때 ㄷ의 그래프와 ㄱ, ㄴ의 그래프는 각 꼭짓점의 차수의 배열이 다르므로 서로 같은 그래프가 아니다.

한편 ㄴ의 그래프에서 오른쪽 그림과 같이 각 꼭짓점을 정한 다음, 꼭짓점 A와 꼭짓점 C의 위치를 바꾼 후, 꼭짓점 B, E와 꼭짓점 A, D의 위치를 서로 바꾸면 ㄱ의 그래프와 같게 된다.

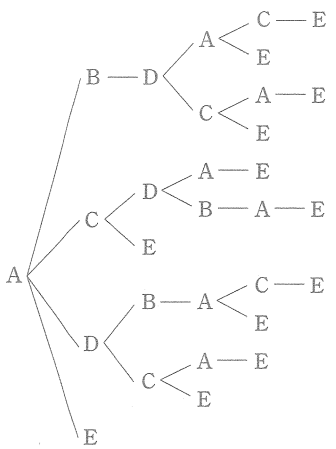




따라서 서로 같은 그래프는 ㄱ, ㄴ이다.

03-1 Action 꼭짓점을 이용한 수형도를 그린다.

(1) 꼭짓점 A에서 꼭짓점 E로 가는 경로를 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 경로를 모두 구하면

ABDACE, ABDAE, ABDCAE, ABDCE, ACDAE, ACDBAE, ACE, ADBACE, ADBAE, ADCAE, ADCE, AE

(2) (1)에서 꼭짓점을 반복하지 않고 꼭짓점 A에서 꼭짓점 E로 가는 경로는

ABDCE, ACE, ADCE, AE

04-1 Action 두 꼭짓점 사이에 변이 있으면 1로, 변이 없으면 0으로 나타낸다.

(1) 주어진 그래프에는 A, B, C, D, E, F의 6개의 점과 AB, AF, BC, CE, CF, DF의 6개의 변이 있으므로 인접행렬은 오른쪽과 같다.

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	1
B	1	0	1	0	0	0
C	0	1	0	0	1	1
D	0	0	0	0	0	1
E	0	0	1	0	0	0
F	1	0	1	1	0	0

(2) 주어진 그래프에는 A, B, C, D, E, F의 6개의 점과 AB, AC, AD, AF, BC, CD, CF, DE, DF, EF의 10개의 변이 있으므로 인접행렬은 오른쪽과 같다.

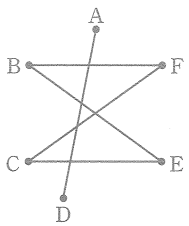
	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	0	1
B	1	0	1	0	0	0
C	1	1	0	1	0	1
D	1	0	1	0	1	1
E	0	0	0	1	0	1
F	1	0	1	1	1	0

참고

자세한 과정은 본문 58쪽 예제 풀이 참조

5-1 Action 주어진 인접행렬에서 성분이 1인 곳을 찾는다.

(1) 꼭짓점 A, B, C, D, E, F를 적당한 위치에 나타내고, 인접행렬에서 대칭이 되는 대각선 윗부분의 성분 중에서 1인 것은 (A, D)성분, (B, E)성분, (B, F)성분, (C, E)성분, (C, F)성분이다.
따라서 꼭짓점 A와 D, 꼭짓점 B와 E, 꼭짓점 B와 F, 꼭짓점 C와 E, 꼭짓점 C와 F를 연결하면 오른쪽 그림과 같다.



(2) [인접행렬 2]는 6×6 행렬이므로 그래프의 꼭짓점은 모두 6개이고, 모든 성분의 합은 14이므로 그래프의 변은 모두 7개이다.

6-1 Action 주어진 그래프의 인접행렬을 구한다.

주어진 그래프의 인접행렬 A를 구하고 행렬 A^2의 (서울, 충주) 성분을 구하면 된다.

$$A=\begin{array}{c} \\ \text{춘천} \\ \text{서울} \\ \text{충주} \\ \text{강릉} \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{춘천} & \text{서울} & \text{충주} & \text{강릉}\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$ 이므로

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

이때 A^2의 (서울, 충주) 성분은
$1\times1+0\times0+0\times0+1\times1=2$

다른 풀이

서울에서 출발하여 중간에 한 도시를 거쳐 충주로 가는 방법은 '서울-춘천-충주', '서울-강릉-충주'의 2가지이다.

셀파 특강 **확인 02** 본문 61 쪽

(1) 주어진 그래프의 인접행렬 A를 구하고 행렬 A^2의 (P, R)성분을 구하면 된다.

$$A=\begin{array}{c} \\ \text{P} \\ \text{Q} \\ \text{R} \\ \text{S} \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{P} & \text{Q} & \text{R} & \text{S}\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$ 이므로

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

이때 A^2의 (P, R)성분은
$0\times1+1\times1+1\times0+1\times1=2$

다른 풀이

그래프에서 도시 P에서 출발하여 중간에 한 도시를 거쳐 도시 R로 가는 방법은 PQR, PSR의 2가지이다.

(2) (1)에서 구한 인접행렬 A에 대하여 행렬 A^3의 (P, P)성분을 구하면 된다. 이때 $A^3=A^2A$이므로 행렬 A^2의 P행을 구해야 한다.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

에서 행렬 A^2의 P행은 $(3\ \ 2\ \ 2\ \ 2)$

또한 행렬 A의 P열은 $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$이므로

A^3의 (P, P) 성분은
$3\times0+2\times1+2\times1+2\times1=6$

다른 풀이

그래프에서 도시 P에서 출발하여 중간에 두 도시를 거쳐 도시 P로 되돌아오는 방법은 PQRP, PQSP, PRQP, PRSP, PSQP, PSRP의 6가지이다.

(3) (1)에서 구한 인접행렬 A에 대하여 행렬 A^4의 (P, Q)성분을 구하면 된다. 이때 $A^4=A^2A^2$이므로 행렬 A^2의 P행과 Q열을 구해야 한다.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

에서 행렬 A^2의 P행은 $(3\ \ 2\ \ 2\ \ 2)$이고,

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

에서 행렬 A^2의 Q열은 $\begin{pmatrix}2\\3\\2\\2\end{pmatrix}$이므로

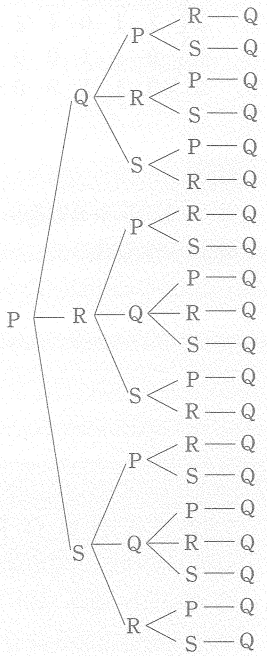
A^4의 (P, Q)성분은
$3\times2+2\times3+2\times2+2\times2=20$

다른 풀이

그래프에서 도시 P에서 출발하여 중간에 세 도시를 거쳐 도시 Q로 가는 방법은
PQPRQ, PQPSQ, PQRPQ, PQRSQ, PQSPQ, PQSRQ, PRPRQ, PRPSQ, PRQPQ, PRQRQ, PRQSQ, PRSPQ, PRSRQ, PSPRQ, PSPSQ, PSQPQ, PSQRQ, PSQSQ, PSRPQ, PSRSQ
로 20가지이다.

오답 피하기

그래프에서 도시 P에서 출발하여 중간에 세 도시를 거쳐 도시 Q로 가는 방법의 수를 구할 때, 위에서 색칠한 경우, 즉
P → Q → ○ → ○ → Q 또는
P → ○ → Q → ○ → Q와
같은 경우를 제외하기 쉽다.
앞에서 경로의 수를 구할 때는 도착점을 지나 다른 곳을 거친 후 다시 도착점에 가는 것은 제외하고 생각했지만 경로의 수가 아니고 방법의 수를 구할 때는 중간에 도착점을 지나 다른 곳을 거친 후 다시 도착점에 가는 것도 생각해야 한다. 이와 같이 중간에 세 도시를 거쳐 가거나 그래프가 복잡한 경우에는 직접 세는 경우에 빼먹는 경우가 생길 수 있으므로 행렬을 이용하도록 하자.
만약 직접 세는 경우에는 오른쪽과 같은 수형도를 반드시 그리도록 하자.



LECTURE

많은 교과서에서 주어진 그래프의 인접행렬 A를 구한 다음, 다음과 같이 A^2, A^3, A^4을 계산하는 풀이를 제시하고 있다.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{matrix}\\P\\Q\\R\\S\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}P&Q&R&S\end{matrix}\\\begin{pmatrix}3&2&\textcircled{2}&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{pmatrix}\end{matrix}$$

$$A^3=A^2A$$
$$=\begin{pmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{matrix}\\P\\Q\\R\\S\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}P&Q&R&S\end{matrix}\\\begin{pmatrix}\textcircled{6}&7&7&7\\7&6&7&7\\7&7&6&7\\7&7&7&6\end{pmatrix}\end{matrix}$$

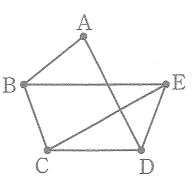
$$A^4=A^3A$$
$$=\begin{pmatrix}6&7&7&7\\7&6&7&7\\7&7&6&7\\7&7&7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{matrix}\\P\\Q\\R\\S\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}P&Q&R&S\end{matrix}\\\begin{pmatrix}21&\textcircled{20}&20&20\\20&21&20&20\\20&20&21&20\\20&20&20&21\end{pmatrix}\end{matrix}$$

그러나 A^2, A^3, A^4을 구해 답을 구하는 것은 행렬의 곱셈을 하는 데 시간이 너무 많이 걸리고 실수하기도 쉽다. 하지만 이 책의 풀이 방법을 이용하면 더 간단하고, 정확한 답도 구할 수 있다.

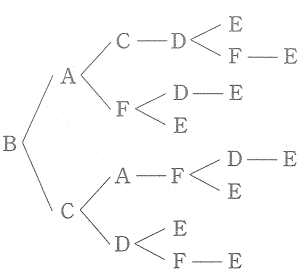
기본강화 본문 62~63쪽

01 Action 꼭짓점의 개수와 변의 개수를 세어 본다.
(1) $n(V)=4$, $n(E)=5$이므로
$n(V)-n(E)=-1$
(2) $n(V)=5$, $n(E)=7$이므로
$n(V)-n(E)=-2$
(3) $n(V)=8$, $n(E)=12$이므로
$n(V)-n(E)=-4$

02 Action 각 꼭짓점의 차수를 구한다.
ㄱ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면
3, 3, 3, 3, 2
ㄴ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면
3, 3, 3, 3, 2
ㄷ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면
4, 3, 3, 3, 3
즉 ㄷ의 그래프는 ㄱ, ㄴ의 그래프와 같은 그래프가 아니다.
이때 ㄱ의 그래프에서 오른쪽 그림과 같이 각 꼭짓점을 정한 다음 꼭짓점 A와 꼭짓점 D의 위치를 바꾸면 ㄴ의 그래프와 같게 된다. 따라서 서로 같은 그래프는 ㄱ, ㄴ이다.



03 Action 꼭짓점을 이용한 수형도를 그린다.
꼭짓점 B에서 꼭짓점 E로 가는 경로를 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.

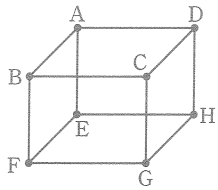


따라서 위의 경로 중 변의 개수가 4인 경로를 모두 구하면
BACDE, BAFDE, BCAFE, BCDFE

참고
BACDFE, BCAFDE는 변의 개수가 5인 경로이고, BAFE, BCDE는 변의 개수가 4인 경로이다.

04 Action 꼭짓점 A에서 출발하여 갈 수 있는 꼭짓점은 B, D, E이다.

오른쪽 그림에서 꼭짓점 A에서 시작하여 갈 수 있는 점은 꼭짓점 B, D, E 중 하나이다.



이때 각각에 대하여 돌아올 수 있는 경로는 2가지 경우가 있다.

예를 들면

$A \to B \to \cdots \to E \to A$

$A \to B \to \cdots \to D \to A$

이때 각각의 경우를 조사해 보면

$A \to B \to C \to D \to H \to G \to F \to E \to A$

$A \to B \to C \to G \to F \to E \to H \to D \to A$

$A \to B \to F \to E \to H \to G \to C \to D \to A$

$A \to B \to F \to G \to C \to D \to H \to E \to A$

또한 $A \to D$로 시작하는 경우와 $A \to E$로 시작하는 경우도 각각 4가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$4 \times 3 = 12$(가지)

05 Action 그래프에서 한 꼭짓점에 연결된 변의 개수를 차수라고 한다.

(1) ㄱ, ㄴ, ㄷ의 그래프에서 각 꼭짓점의 차수는 각각 다음과 같다.

ㄱ. A : 2, B : 3, C : 3, D : 2, E : 4, F : 2

ㄴ. A : 3, B : 3, C : 3, D : 3

ㄷ. A : 2, B : 2, C : 2, D : 2, E : 2, F : 4, G : 2

(2) 한 꼭짓점에서 시작하여 모든 변을 한 번씩만 지난 후 출발한 꼭짓점으로 되돌아오는 경로가 존재하려면 모든 꼭짓점의 차수가 짝수이어야 한다.

따라서 구하는 그래프는 ㄷ이다.

LECTURE 한붓그리기

그래프의 한 꼭짓점에서 시작하여 모든 변을 한 번씩만 지난 후 출발한 꼭짓점으로 되돌아오는 경로가 존재하기 위한 필요충분조건은 '그래프의 모든 꼭짓점의 차수가 짝수이다.' 이다.

또한 그래프에서 연필을 떼지 않고 모든 변을 오직 한 번만 지나는 것을 한붓그리기라 하고, 그래프에서 한붓그리기가 가능하려면 시작점과 끝점을 제외한 모든 꼭짓점의 차수가 짝수이어야 한다.

⇨ ㄱ의 그래프도 한붓그리기가 가능하다. 단, 점 B에서 시작하면 점 C에서 끝나게 그릴 수 있고, 점 C에서 시작하면 점 B에서 끝나게 그릴 수는 있지만, 시작점에서 끝나게 그릴 수는 없다.

06 Action 두 꼭짓점 사이에 변이 있으면 1로, 변이 없으면 0으로 나타낸다.

(1)
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

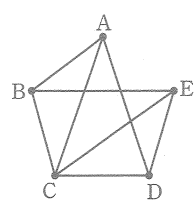
참고

각 그래프의 인접행렬을 구하는 자세한 방법은 본문 58쪽 **기본 해법** 04에 있다.

평가원 기출

07 Action 주어진 인접행렬을 그래프로 나타낸다.

5개의 점 A, B, C, D, E를 평면에 적당히 나타내고 인접행렬의 성분이 1일 때 해당하는 행과 열의 꼭짓점을 변으로 연결하면 오른쪽과 같다.



ㄱ. 변의 개수는 8이다. (참)

ㄴ. 각 꼭짓점의 차수를 큰 순서대로 나열하면 4, 3, 3, 3, 3이므로 차수가 3인 꼭짓점의 개수는 4이다. (참)

ㄷ. 꼭짓점 A와 꼭짓점 C를 잇는 두 개의 변으로 이루어진 경로는 ABC, ADC로 2개이다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄱ. 주어진 인접행렬의 모든 성분의 합은 16이므로 변의 개수는 $\frac{16}{2}=8$이다. (참)

ㄴ. 주어진 인접행렬에서 모든 성분의 합이 3인 행은 1, 2, 4, 5행의 4개이다. 그러므로 차수가 3인 꼭짓점은 4개이다. (참)

ㄷ. 주어진 인접행렬을 A라 하고, 행렬 A^2의 (A, C)성분을 구하면 된다.

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

이때 A^2의 (A, C)성분은

$0\times1+1\times1+1\times0+1\times1+0\times1=2$

따라서 꼭짓점 A와 꼭짓점 C를 잇는 두 개의 변으로 이루어진 경로의 개수는 2이다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

LECTURE 인접행렬의 모든 성분의 합

인접행렬의 모든 성분의 합은 그래프의 모든 꼭짓점의 차수의 합과 같다. 또한 그래프의 모든 꼭짓점의 차수의 합은 변의 개수의 2배이다.
따라서 인접행렬의 모든 성분의 합은 그래프의 변의 개수의 2배이다.

08 Action 주어진 그래프의 인접행렬을 구한다.

(1) 주어진 그래프의 인접행렬 A를 구하고 행렬 A^2의 (B, A) 성분을 구하면 된다.

$$A=\begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E}\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\0&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$ 이므로

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\0&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\0&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

이때 A^2의 (B, A) 성분은
$1\times0+0\times1+1\times1+1\times0+1\times1=2$

다른 풀이

그래프에서 꼭짓점 B에서 다른 한 꼭짓점을 지나 꼭짓점 A로 가는 방법은 BCA, BEA의 2가지이다.

(2) (1)에서 구한 인접행렬 A에 대하여 행렬 A^3의 (A, E) 성분을 구하면 된다. 이때 $A^3=A^2A$이므로 행렬 A^2의 A행을 구해야 한다.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\0&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\0&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

에서 행렬 A^2의 A행은 $(3\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2)$

또한 행렬 A의 E열은 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ 이므로

A^3의 (A, E) 성분은
$3\times1+2\times1+2\times1+2\times0+2\times0=7$

다른 풀이

그래프에서 꼭짓점 A에서 다른 두 꼭짓점을 지나 꼭짓점 E로 가는 방법은 ABAE, ABCE, ACAE, ACBE, AEAE, AEBE, AECE의 7가지이다.

09 Action 행렬 A^2의 각 성분이 뜻하는 의미를 생각한다.

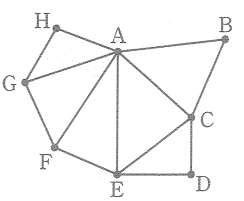
주어진 행렬 A^2의 행과 열의 순서를 각각 P, Q, R, S, T라 하자.

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{S} \\ \mathrm{T} \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{S} & \mathrm{T}\end{array}\\ \begin{pmatrix}4&1&2&1&2\\1&2&2&1&1\\2&2&3&1&1\\1&1&1&2&2\\2&1&1&2&3\end{pmatrix}\end{array}$$

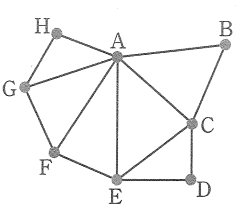
행렬 A^2의 (P, P) 성분은 꼭짓점 P에서 출발하여 한 꼭짓점을 거쳐 다시 꼭짓점 P로 되돌아오는 방법의 수이므로 꼭짓점 P와 연결된 변의 개수와 같다. 즉 꼭짓점 P와 연결된 변의 개수는 4이다.
같은 원리로 행렬 A^2의 (Q, Q) 성분 2는 꼭짓점 Q와 연결된 변의 개수를 뜻하고, 행렬 A^2의 (R, R) 성분 3은 꼭짓점 R와 연결된 변의 개수, 행렬 A^2의 (S, S) 성분 2는 꼭짓점 S와 연결된 변의 개수, 행렬 A^2의 (T, T) 성분 3은 꼭짓점 T와 연결된 변의 개수를 뜻한다. 즉 각 꼭짓점 P, Q, R, S, T에 연결된 변의 개수는 각각 4, 2, 3, 2, 3이다.
따라서 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 총합은
$4+2+3+2+3=14$
이것은 그래프의 변의 개수의 2배이므로 구하는 그래프의 변의 개수는 $\frac{14}{2}=7$

10 Action 영역을 꼭짓점으로 바꾸고 이웃한 영역을 변으로 이어 그래프를 그린다.

주어진 8개의 영역을 점으로 표시하고 이웃한 영역을 선으로 이어 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



이때 영역 A, B, C는 모두 서로 이웃하고 있으므로 2개 이하의 색으로는 이웃한 영역을 서로 다른 색으로 칠하는 것이 불가능하다.
또한 3개의 색으로 칠할 경우 3가지 색을 1, 2, 3이라 하고, A에 1번 색을 칠하면 B, C, E, F, G, H는 모두 A와 이웃하였으므로 2번 색과 3번 색만으로 칠해야 한다. 그리고 B는 C와 C는 E와, E는 F와, F는 G와, G는 H와 차례로 이웃하였으므로 2번 색과 3번 색을 번갈아가며 교대로 칠해야 하고 D는 A와 이웃하지 않았으므로 A와 같은 1번 색을 칠해도 된다. 즉 3가지 색으로 오른쪽 그림과 같이 이웃한 영역을 서로 다른 색으로 칠할 수 있으므로 주어진 그림을 색칠하는 데 필요한 최소의 색은 3가지이다.



Ⅱ 지수함수와 로그함수

1. 지수

개념 강화 드릴 본문 67 쪽

01 (1) -1의 세제곱근을 x라고 하면

$x^3=-1$, 즉 $x^3+1=0$에서

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -1의 세제곱근 중 실수인 것은 -1

(2) 8의 세제곱근을 x라고 하면

$x^3=8$, 즉 $x^3-8=0$에서

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1-\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1+\sqrt{3}i$

따라서 8의 세제곱근 중 실수인 것은 2

(3) 64의 네제곱근을 x라고 하면

$x^4=64$, 즉 $x^4-64=0$에서

$(x^2+8)(x^2-8)=0$

$(x+2\sqrt{2}i)(x-2\sqrt{2}i)(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0$

$\therefore x=-2\sqrt{2}i$ 또는 $x=2\sqrt{2}i$

또는 $x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

따라서 64의 네제곱근 중 실수인 것은 $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$

(4) $-0.027=-\dfrac{27}{1000}$의 세제곱근을 x라고 하면

$x^3=-\dfrac{27}{1000}$, 즉 $x^3+\dfrac{27}{1000}=0$에서

$\left(x+\dfrac{3}{10}\right)\left(x^2-\dfrac{3}{10}x+\dfrac{9}{100}\right)=0$

$\therefore x=-\dfrac{3}{10}$ 또는 $x=\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{20}$ 또는 $x=\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{20}$

따라서 -0.027의 세제곱근 중 실수인 것은 $-\dfrac{3}{10}$

02 (1) $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

(2) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

(3) $\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{4^4}=4$

(4) $\sqrt[4]{0.0081}=\sqrt[4]{0.3^4}=0.3$

03 (1) $\sqrt[3]{25}\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{25\times5}=\sqrt[3]{5^3}=5$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[4]{\dfrac{64}{4}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(3) $(\sqrt{3})^6=\sqrt{3^6}=\sqrt{3^{2\times3}}=3^3$

(4) $\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt[2\times2]{3^4}=\sqrt[4]{3^4}=3$

04 (1) $2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2^1}=\sqrt[4]{2}$

(2) $3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{9}$

(3) $2^{-\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{2^{-2}}=\sqrt[5]{\dfrac{1}{2^2}}=\sqrt[5]{\dfrac{1}{4}}$

(4) $3^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{3^{-4}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{3^4}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{81}}$

오답 피하기

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ $(a>0)$으로 정의할 때의 조건은 m이 정수, n이 2 이상의 정수이다. 예를 들어 **04**-(3)에서

$2^{-\frac{2}{5}}=2^{\frac{2}{-5}}=\sqrt[-5]{2^2}$

으로 답하지 않도록 주의한다.

05 (1) $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$

(2) $\sqrt[4]{243}=\sqrt[4]{3^5}=3^{\frac{5}{4}}$

(3) $\sqrt{\dfrac{1}{8}}=\sqrt{2^{-3}}=\sqrt[2]{2^{-3}}=2^{-\frac{3}{2}}$

(4) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{25}}=\sqrt[4]{5^{-2}}=5^{-\frac{2}{4}}=5^{-\frac{1}{2}}$

06 $\{(-2)^6\}^{\frac{1}{2}}=(-2)^{6\times\frac{1}{2}}=(-2)^3=-8$

① ② ③

지수가 유리수일 때 지수법칙은 밑이 양수인 경우만 성립하기 때문에 ①과 같이 밑이 음수인 유리수 지수의 경우에는 괄호를 순서대로 풀어야 한다.

참고

지수가 정수인 경우 밑이 0이 아니면 지수법칙이 항상 성립하지만, 지수가 정수가 아닌 경우에는 밑이 양수일 때에만 지수법칙이 성립한다.

따라서 이 문제를 제대로 풀면 다음과 같다.

$\{(-2)^6\}^{\frac{1}{2}}=(2^6)^{\frac{1}{2}}=2^{6\times\frac{1}{2}}=2^3=8$

07 (1) $2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{5}{2}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{2}}=2^{\frac{17}{6}}=\sqrt[6]{2^{17}}$

(2) $\left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{4}{5}}=3^{\frac{5}{2}\times\frac{4}{5}}=3^2$

(3) $\left(2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{12}{5}}=2^{\frac{1}{4}\times\frac{12}{5}}\times3^{\frac{1}{6}\times\frac{12}{5}}$

$=2^{\frac{3}{5}}\times3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{2^3}\times\sqrt[5]{3^2}$

$=\sqrt[5]{2^3\times3^2}=\sqrt[5]{72}$

(4) $7^{\frac{1}{4}}\div7^{\frac{3}{2}}\div7^{\frac{3}{4}}=7^{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}}$

$=7^{-2}=\dfrac{1}{49}$

셀파 특강 **확인 01** 본문 68 쪽

(1) -8의 세제곱근을 x라고 하면
$x^3=-8$, 즉 $x^3+8=0$에서
$(x+2)(x^2-2x+4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1-\sqrt{3}i$ 또는 $x=1+\sqrt{3}i$
따라서 -8의 세제곱근은 $\boldsymbol{-2,\ 1-\sqrt{3}i,\ 1+\sqrt{3}i}$

(2) 81의 네제곱근을 x라고 하면
$x^4=81$, 즉 $x^4-81=0$에서
$(x^2+9)(x^2-9)=0$
$(x+3i)(x-3i)(x+3)(x-3)=0$
$\therefore x=-3i$ 또는 $x=3i$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=3$
따라서 81의 네제곱근은 $\boldsymbol{-3i,\ 3i,\ -3,\ 3}$

확인 문제 본문 69~76 쪽

01-1 Action 지수법칙을 이용한다.

(1) $(a^2)^3\times a^5\div(a^4)^2=a^6\times a^5\div a^8$
$=a^{6+5-8}=\boldsymbol{a^3}$

(2) $(ab^5)^3\div(a^3b^4)^2=a^3b^{15}\div a^6b^8$
$=\dfrac{1}{a^{6-3}}\times b^{15-8}=\boldsymbol{\dfrac{b^7}{a^3}}$

다른 풀이

$a^3b^{15}\div a^6b^8=a^{3-6}b^{15-8}=a^{-3}b^7=\dfrac{b^7}{a^3}$

01-2 Action a의 n제곱근을 x라고 하면 $x^n=a$이다.

① 8의 세제곱근을 x라고 하면
$x^3=8$, 즉 $x^3-8=0$에서
$(x-2)(x^2+2x+4)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=-1-\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1+\sqrt{3}i$
따라서 8의 세제곱근은 $2,\ -1-\sqrt{3}i,\ -1+\sqrt{3}i$이다.

② $(-1)^3=-1$이므로 -1은 -1의 세제곱근이다.

③ $2^4=16$, $(-2)^4=16$이므로 2와 -2는 16의 네제곱근이다.

④ $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$, $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

⑤ $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$이지만
-81의 네제곱근이 되는 실수는 존재하지 않는다.

따라서 옳지 않은 것은 ①, ⑤이다.

오답 피하기

②에서 '-1은 -1의 세제곱근이다.'는 옳은 표현이지만 '-1의 세제곱근은 -1이다.'는 틀린 표현이다.

-1의 세제곱근은 -1, $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$로 3개이다.

02-1 Action 거듭제곱근의 성질을 이용하여 계산한다. 즉 k가 양의 정수일 때, $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$

(1) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[8]{2}}}=\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}}\times\dfrac{\sqrt{\sqrt[6]{2}}}{\sqrt[8]{2}}=\dfrac{\sqrt[4\times2]{2}}{\sqrt[4\times3]{2}}\times\dfrac{\sqrt[2\times6]{2}}{\sqrt[2\times8]{2}}$
$=\dfrac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt[12]{2}}\times\dfrac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[16]{2}}=\dfrac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt[16]{2}}=\dfrac{\sqrt[8\times2]{2^2}}{\sqrt[16]{2}}$
$=\sqrt[16]{\dfrac{2^2}{2}}=\boldsymbol{\sqrt[16]{2}}$

다른 풀이

$\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[8]{2}}}=\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}}\times\dfrac{\sqrt{\sqrt[6]{2}}}{\sqrt[8]{2}}=\dfrac{(2^{\frac12})^{\frac14}}{(2^{\frac13})^{\frac14}}\times\dfrac{(2^{\frac16})^{\frac12}}{(2^{\frac18})^{\frac12}}$
$=\dfrac{2^{\frac18}}{2^{\frac{1}{12}}}\times\dfrac{2^{\frac{1}{12}}}{2^{\frac{1}{16}}}=\dfrac{2^{\frac18}}{2^{\frac{1}{16}}}$
$=2^{\frac18-\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{16}}=\boldsymbol{\sqrt[16]{2}}$

(2) $\sqrt[5]{27}\div\sqrt[3]{3}\times\sqrt[15]{3}=\sqrt[5\times3]{3^{3\times3}}\div\sqrt[3\times5]{3^5}\times\sqrt[15]{3}$
$=\dfrac{\sqrt[15]{3^9\times3}}{\sqrt[15]{3^5}}=\sqrt[15]{\dfrac{3^{10}}{3^5}}=\boldsymbol{\sqrt[15]{3^5}}$
$=\sqrt[3\times5]{3^5}=\boldsymbol{\sqrt[3]{3}}$

다른 풀이

$\sqrt[5]{27}\div\sqrt[3]{3}\times\sqrt[15]{3}=27^{\frac15}\div3^{\frac13}\times3^{\frac{1}{15}}$
$=(3^3)^{\frac15}\div3^{\frac13}\times3^{\frac{1}{15}}$
$=3^{\frac35-\frac13+\frac{1}{15}}$
$=3^{\frac13}=\boldsymbol{\sqrt[3]{3}}$

02-2 Action 거듭제곱근의 성질을 이용하여 계산한다. 즉

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{a}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt{\sqrt[5]{a}}}\times\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}\times\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}$
$=\dfrac{\sqrt[2\times3]{a}}{\sqrt[2\times5]{a}}\times\dfrac{\sqrt[3\times5]{a}}{\sqrt[3\times2]{a}}\times\dfrac{\sqrt[5\times2]{a}}{\sqrt[5\times3]{a}}$
$=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[10]{a}}\times\dfrac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\dfrac{\sqrt[10]{a}}{\sqrt[15]{a}}=1$

다른 풀이

$\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{a}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt{\sqrt[5]{a}}}\times\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}\times\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}$
$=\dfrac{(a^{\frac13})^{\frac12}}{(a^{\frac15})^{\frac12}}\times\dfrac{(a^{\frac15})^{\frac13}}{(a^{\frac12})^{\frac13}}\times\dfrac{(a^{\frac12})^{\frac15}}{(a^{\frac13})^{\frac15}}$
$=\dfrac{a^{\frac16}}{a^{\frac{1}{10}}}\times\dfrac{a^{\frac{1}{15}}}{a^{\frac16}}\times\dfrac{a^{\frac{1}{10}}}{a^{\frac{1}{15}}}=1$

쌤의 특강 확인 02 본문 71 쪽

(1) $\sqrt{\sqrt[4]{a^3}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^k}}$에서 $\sqrt[2\times4]{a^3}=\sqrt[3\times4]{a^k}$, $\sqrt[8]{a^3}=\sqrt[12]{a^k}$

즉 $a^{\frac{3}{8}}=a^{\frac{k}{12}}$이므로 $\frac{3}{8}=\frac{k}{12}$ $\therefore k=\frac{9}{2}$

다른 풀이

$\sqrt{\sqrt[4]{a^3}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^k}}$에서

$\left(\sqrt{\sqrt[4]{a^3}}\right)^{24}=\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^k}}\right)^{24}$, $\left(\sqrt[8]{a^3}\right)^{24}=\left(\sqrt[12]{a^k}\right)^{24}$, $a^{\frac{3}{8}\times24}=a^{\frac{k}{12}\times24}$

즉 $a^9=a^{2k}$이므로 $9=2k$ $\therefore k=\frac{9}{2}$

(2) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}=\sqrt[2\times2\times2\times2]{a}=\sqrt[16]{a}=a^{\frac{1}{16}}$,

$\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[4\times4\times4]{a}=\sqrt[64]{a}=a^{\frac{1}{64}}$이므로

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}\times\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{a}}}=a^{\frac{1}{16}}\times a^{\frac{1}{64}}=a^{\frac{1}{16}+\frac{1}{64}}=a^{\frac{5}{64}}$

$\therefore k=\frac{5}{64}$

다른 풀이

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}\times\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[2\times2\times2\times2]{a}\times\sqrt[4\times4\times4]{a}$

$=\sqrt[16]{a}\times\sqrt[64]{a}=\sqrt[16\times4]{a^{1\times4}}\times\sqrt[64]{a}$

$=\sqrt[64]{a^4\times a}=\sqrt[64]{a^5}=a^{\frac{5}{64}}$

$\therefore k=\frac{5}{64}$

03-1 Action 거듭제곱근의 성질 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}$을 이용한다.

(1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{7}$에서 2, 3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$\sqrt{2}=\sqrt[2\times6]{2^{1\times6}}=\sqrt[12]{2^6}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[3\times4]{3^{1\times4}}=\sqrt[12]{3^4}$,

$\sqrt[4]{5}=\sqrt[4\times3]{5^{1\times3}}=\sqrt[12]{5^3}$, $\sqrt[6]{7}=\sqrt[6\times2]{7^{1\times2}}=\sqrt[12]{7^2}$

이때 $5^3=125>3^4=81>2^6=64>7^2=49$이므로

$\sqrt[12]{5^3}>\sqrt[12]{3^4}>\sqrt[12]{2^6}>\sqrt[12]{7^2}$

$\therefore \sqrt[4]{5}>\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}>\sqrt[6]{7}$

다른 풀이

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$이고 각 지수의 분모의 최소공배수가 12이므로

$2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{6}{12}}=(2^6)^{\frac{1}{12}}=64^{\frac{1}{12}}$

$3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{12}}=(3^4)^{\frac{1}{12}}=81^{\frac{1}{12}}$

$5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{12}}=(5^3)^{\frac{1}{12}}=125^{\frac{1}{12}}$

$7^{\frac{1}{6}}=7^{\frac{2}{12}}=(7^2)^{\frac{1}{12}}=49^{\frac{1}{12}}$

이때 $125^{\frac{1}{12}}>81^{\frac{1}{12}}>64^{\frac{1}{12}}>49^{\frac{1}{12}}$이므로

$\sqrt[4]{5}>\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}>\sqrt[6]{7}$

(2) $\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[3\times2]{10}=\sqrt[6]{10}$, $\sqrt[5]{8}$, $\sqrt{\sqrt{5}}=\sqrt[2\times2]{5}=\sqrt[4]{5}$

이때 $\sqrt[6]{10}$, $\sqrt[5]{8}$, $\sqrt[4]{5}$에서 6, 5, 4의 최소공배수가 60이므로

$\sqrt[6]{10}=\sqrt[6\times10]{10^{1\times10}}=\sqrt[60]{10^{10}}$

$\sqrt[5]{8}=\sqrt[5\times12]{8^{1\times12}}=\sqrt[60]{8^{12}}$

$\sqrt[4]{5}=\sqrt[4\times15]{5^{1\times15}}=\sqrt[60]{5^{15}}$

(i) $10^{10}=(10^2)^5=100^5$, $5^{15}=(5^3)^5=125^5$

이때 $125>100$이므로 $5^{15}>10^{10}$

(ii) $8^{12}=(8^4)^3$, $5^{15}=(5^5)^3$

이때 $8^4=4096>5^5=3125$이므로 $8^{12}>5^{15}$

(i), (ii)로부터 $8^{12}>5^{15}>10^{10}$이므로

$\sqrt[60]{8^{12}}>\sqrt[60]{5^{15}}>\sqrt[60]{10^{10}}$

$\therefore \sqrt[5]{8}>\sqrt{\sqrt{5}}>\sqrt[3]{\sqrt{10}}$

다른 풀이 1

$\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[3\times2]{10}=\sqrt[6]{10}=10^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[5]{8}=8^{\frac{1}{5}}$,

$\sqrt{\sqrt{5}}=\sqrt[2\times2]{5}=\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}$

(i) $10^{\frac{1}{6}}=10^{\frac{2}{12}}=(10^2)^{\frac{1}{12}}$, $5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{12}}=(5^3)^{\frac{1}{12}}$에서

$10^2<5^3$이므로 $10^{\frac{1}{6}}<5^{\frac{1}{4}}$

(ii) $8^{\frac{1}{5}}=8^{\frac{4}{20}}=(8^4)^{\frac{1}{20}}$, $5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{5}{20}}=(5^5)^{\frac{1}{20}}$에서

$5^5<8^4$이므로 $5^{\frac{1}{4}}<8^{\frac{1}{5}}$

(i), (ii)로부터 $\sqrt[5]{8}>\sqrt{\sqrt{5}}>\sqrt[3]{\sqrt{10}}$

다른 풀이 2

뒤에 나오는 상용로그를 배운 다음에는 상용로그를 이용하여 이 문제를 풀면 더 쉽게 해결할 수 있다.

$\log 10=1$, $\log 2=0.3010$, $\log 5=0.6990$이므로

$10^{\frac{1}{6}}$에서 $\log 10^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\log 10=\frac{1}{6}=0.16\times\times$

$8^{\frac{1}{5}}$에서 $\log 8^{\frac{1}{5}}=\log 2^{\frac{3}{5}}=\frac{3}{5}\log 2=0.18\times\times$

$5^{\frac{1}{4}}$에서 $\log 5^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\log 5=0.17\times\times$

따라서 $\log 8^{\frac{1}{5}}>\log 5^{\frac{1}{4}}>\log 10^{\frac{1}{6}}$이므로

$\sqrt[5]{8}>\sqrt{\sqrt{5}}>\sqrt[3]{\sqrt{10}}$

04-1 Action 지수법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

(1) $\left(\frac{2}{5}\right)^0+\left\{\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{4}{3}}=1+\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}}=1+\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

$=1+\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^3\right\}^{\frac{2}{3}}=1+\left(\frac{5}{2}\right)^{3\times\frac{2}{3}}$

$=1+\left(\frac{5}{2}\right)^2=1+\frac{25}{4}=\frac{29}{4}$

(2) $32^{-0.2}+25^{-0.5}=32^{-\frac{1}{5}}+25^{-\frac{1}{2}}=(2^5)^{-\frac{1}{5}}+(5^2)^{-\frac{1}{2}}$
$=2^{5\times(-\frac{1}{5})}+5^{2\times(-\frac{1}{2})}$
$=2^{-1}+5^{-1}$
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$

(3) $(4^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}}=4^{\sqrt{3}\times\sqrt{12}}=4^{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}$
$=4^6=(2^2)^6$
$=2^{12}=\mathbf{4096}$

(4) $9^{-\frac{3}{2}}\times8^{\frac{1}{3}}\div\sqrt{81^{-3}}=(3^2)^{-\frac{3}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{3}}\div\sqrt{(3^4)^{-3}}$
$=3^{2\times(-\frac{3}{2})}\times2^{3\times\frac{1}{3}}\div3^{4\times(-\frac{3}{2})}$
$=3^{-3}\times2\div3^{-6}$
$=3^{-3-(-6)}\times2$
$=3^3\times2=\mathbf{54}$

4-2 Action 지수법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

(1) $a^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\times a^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}\div a^{-2\sqrt{3}}=a^{-\frac{\sqrt{3}}{2}+(-\frac{3\sqrt{3}}{2})-(-2\sqrt{3})}$
$=a^{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}}$
$=a^0=\mathbf{1}$

(2) $\sqrt{a^5b^{12}}\times\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}b^{-6}}=(a^5b^{12})^{\frac{1}{2}}\times(a^{\frac{1}{2}}b^{-6})^{\frac{1}{3}}$
$=a^{\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}}b^{12\times\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}b^{-6\times\frac{1}{3}}$
$=a^{\frac{5}{4}}b^6\times a^{\frac{1}{6}}b^{-2}$
$=a^{\frac{5}{4}+\frac{1}{6}}b^{6-2}$
$=\mathbf{a^{\frac{17}{12}}b^4}$

5-1 Action 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

(1) $a+a^{-1}=5$의 양변을 제곱하면
$a^2+2+a^{-2}=25$
$\therefore a^2+a^{-2}=\mathbf{23}$

(2) $a+a^{-1}=5$의 양변을 세제곱하면
$a^3+a^{-3}+3aa^{-1}(a+a^{-1})=125$
$a^3+a^{-3}+3\times1\times5=125$
$\therefore a^3+a^{-3}=\mathbf{110}$

(3) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$의 양변을 제곱하면
$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=5+2=7$
$\therefore a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{7}$
그런데 $a>0$이므로 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\mathbf{\sqrt{7}}$

(4) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$의 양변을 세제곱하면
$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})=7\sqrt{7}$
$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3\times1\times\sqrt{7}=7\sqrt{7}$
$\therefore a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=\mathbf{4\sqrt{7}}$

5-2 Action 곱셈 공식을 변형하여 주어진 식의 값을 구한다.

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 세제곱하면
$a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}-3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})=8$
$a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}-3\times1\times2=8$
$\therefore a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=14$
또한 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 제곱하면
$a-2+a^{-1}=4$에서 $a+a^{-1}=6$
$a+a^{-1}=6$의 양변을 제곱하면
$a^2+2+a^{-2}=36$
$\therefore a^2+a^{-2}=34$
$\therefore \frac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}+6}{a^2+a^{-2}-4}=\frac{14+6}{34-4}=\frac{20}{30}=\mathbf{\frac{2}{3}}$

LECTURE a의 값을 직접 구해 풀기

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$에서 $a^{\frac{1}{2}}=t(t>0)$라고 하면
$t-\frac{1}{t}=2$, 즉 $t^2-2t-1=0$에서
$t=1+\sqrt{2}(\because t>0)$
따라서 $a=t^2=(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$,
$a^{\frac{3}{2}}=t^3=(1+\sqrt{2})^3=1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}=7+5\sqrt{2}$,
$a^2=t^4=(t^2)^2=(3+2\sqrt{2})^2=17+12\sqrt{2}$이다.
그러나 문제를 풀려면 이 값들만 대입하면 되는 것이 아니고, 각각의 역수 값을 또 구한 후 대입해야 한다. 이와 같이 주어진 조건을 이용하여 a의 값을 구한 후 문제에 대입해 풀 수는 있지만 계산 과정이 복잡하여 계산 과정에서 실수할 확률이 높다. 따라서 이와 같은 문제는 a의 값을 직접 구하려 하지 말고, 반드시 곱셈 공식을 활용하여 문제를 풀도록 하자.

셀프 비법 **확인 03** 본문 75 쪽

(1) $x=3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}$에서
$x^2-4=(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})^2-4=(3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}})^2$이므로
$\sqrt{x^2-4}=3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}\ (\because 3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}>0)$
$\therefore x+\sqrt{x^2-4}=3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}$
$=2\times3^{\frac{1}{2}}=\mathbf{2\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$이므로
$2^x=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{2\sqrt{2}}=2^{\frac{3}{4}}$
$\therefore 16^x-16^{-x}=(2^x)^4-(2^x)^{-4}$
$=(2^{\frac{3}{4}})^4-(2^{\frac{3}{4}})^{-4}$
$=2^3-2^{-3}=8-\frac{1}{8}=\mathbf{\frac{63}{8}}$

6-1 Action 주어진 식을 a^{2x}을 포함하는 식으로 변형한다.

$a^{2x}=2$이므로

(1) $\left(\frac{1}{a^3}\right)^{4x}=\frac{1}{a^{12x}}=\frac{1}{(a^{2x})^6}$

$=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$

(2) 주어진 식의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}$

$=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$

$=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$

(3) 주어진 식의 분모, 분자에 각각 a^{3x}을 곱하면

$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^{3x}(a^{3x}-a^{-3x})}{a^{3x}(a^x-a^{-x})}$

$=\frac{a^{6x}-1}{a^{4x}-a^{2x}}$

$=\frac{(a^{2x})^3-1}{(a^{2x})^2-a^{2x}}$

$=\frac{2^3-1}{2^2-2}=\frac{8-1}{4-2}=\frac{7}{2}$

다른 풀이

$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{(a^x)^3-(a^{-x})^3}{a^x-a^{-x}}$

$=\frac{(a^x-a^{-x})(a^{2x}+a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x})}{a^x-a^{-x}}$

$=a^{2x}+1+\frac{1}{a^{2x}}$

$=2+1+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

6-2 Action 주어진 식 좌변의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱한다.

$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{1}{2}$에서 좌변의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{1}{2}$ $\therefore \frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\frac{1}{2}$

따라서 $2(a^{2x}-1)=a^{2x}+1$이므로

$2a^{2x}-2=a^{2x}+1$ $\therefore a^{2x}=3$

$\therefore a^{6x}=(a^{2x})^3=3^3=27$

다른 풀이

$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{1}{2}$에서 $2(a^x-a^{-x})=a^x+a^{-x}$

$2a^x-2a^{-x}=a^x+a^{-x}$ $\therefore a^x=3a^{-x}$

이 식의 양변에 a^x을 곱하면 $a^{2x}=3$이므로

$a^{6x}=(a^{2x})^3=3^3=27$

셀파 비법 확인 04 본문 77 쪽

(1) $100^x=125$에서 양변을 $\frac{1}{x}$제곱하면

$(100^x)^{\frac{1}{x}}=125^{\frac{1}{x}}$, $100=125^{\frac{1}{x}}=(5^3)^{\frac{1}{x}}$

$\therefore 5^{\frac{3}{x}}=100$ ····· ㉠

$4^y=5$에서 양변을 $\frac{1}{y}$제곱하면

$(4^y)^{\frac{1}{y}}=5^{\frac{1}{y}}$ $\therefore 5^{\frac{1}{y}}=4$ ····· ㉡

㉠÷㉡에서 $5^{\frac{3}{x}}\div 5^{\frac{1}{y}}=100\div 4=25$

즉 $5^{\frac{3}{x}-\frac{1}{y}}=25=5^2$이므로 $\frac{3}{x}-\frac{1}{y}=2$

참고

위의 계산 과정 중 ㉠÷㉡은 $\frac{3}{x}-\frac{1}{y}$의 값을 구하기 위한 것이다. 만약 $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}$의 값을 구하려면 ㉠×㉡을 계산해야 한다.

또 $\frac{1}{y}-\frac{3}{x}$의 값은 ㉡÷㉠을 계산하면 된다.

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=4$에서 양변을 $\frac{1}{x}$제곱하면

$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}=4^{\frac{1}{x}}$, $\frac{1}{5}=4^{\frac{1}{x}}=(2^2)^{\frac{1}{x}}$ $\therefore 2^{\frac{2}{x}}=\frac{1}{5}$ ····· ㉠

$10^y=8$에서 양변을 $\frac{1}{y}$제곱하면

$(10^y)^{\frac{1}{y}}=8^{\frac{1}{y}}$, $10=8^{\frac{1}{y}}=(2^3)^{\frac{1}{y}}$ $\therefore 2^{\frac{3}{y}}=10$ ····· ㉡

㉠×㉡에서 $2^{\frac{2}{x}}\times 2^{\frac{3}{y}}=\frac{1}{5}\times 10=2$

즉 $2^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}=2=2^1$이므로 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$

(3) $a^x=243$에서 양변을 $\frac{1}{x}$제곱하면

$(a^x)^{\frac{1}{x}}=243^{\frac{1}{x}}$ $\therefore a=243^{\frac{1}{x}}$ ····· ㉠

$b^y=243$에서 양변을 $\frac{1}{y}$제곱하면

$(b^y)^{\frac{1}{y}}=243^{\frac{1}{y}}$ $\therefore b=243^{\frac{1}{y}}$ ····· ㉡

$c^z=243$에서 양변을 $\frac{1}{z}$제곱하면

$(c^z)^{\frac{1}{z}}=243^{\frac{1}{z}}$ $\therefore c=243^{\frac{1}{z}}$ ····· ㉢

㉠×㉡×㉢에서

$abc=243^{\frac{1}{x}}\times 243^{\frac{1}{y}}\times 243^{\frac{1}{z}}$

$=243^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=3^{5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$

이때 $abc=9$이므로 $3^{5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=9=3^2$

즉 $5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=2$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{5}$

기본강화 본문 78~79쪽

수능 기출

01 Action $(-a)^k$이 양수인 경우와 음수인 경우로 나누어 생각한다.

$(-a)^{2n}$은 양수이므로 $\sqrt[2m]{(-a)^{2n}}$, $\sqrt[2m-1]{(-a)^{2n}}$은 모든 실수이다. 그러나 $(-a)^{2n-1}$은 음수이므로 $\sqrt[2m-1]{(-a)^{2n-1}}$은 실수이지만 $\sqrt[2m]{(-a)^{2n-1}}$은 실수가 아니다.

따라서 실수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

수능 기출

02 Action $1\text{ mm}=10^{-3}\text{ m}$이므로 $0.01\text{ mm}=10^{-5}\text{ m}$이다.

$1\text{ mm}=10^{-3}\text{ m}$이므로 $0.01\text{ mm}=10^{-5}\text{ m}$

이때 주어진 공식 $l=\frac{\pi t}{6}(2^n+4)(2^n-1)$에

$t=10^{-5}$과 $\pi=3.14$, $n=12$, 즉 $2^{12}=4096$을 대입하면

$l=\frac{3.14\times10^{-5}}{6}\times4100\times4095\fallingdotseq87.8\times\times\times$

따라서 걸리반이 사용한 화장지는 **90 m**짜리이다.

교육청 기출

03 Action $3^{\square}$ 꼴로 나타낸 후 공통인수를 약분한다.

$$\sqrt{\frac{9^7+3^{10}}{9^4+3^4}}=\sqrt{\frac{(3^2)^7+3^{10}}{(3^2)^4+3^4}}=\sqrt{\frac{3^{14}+3^{10}}{3^8+3^4}}$$

$$=\sqrt{\frac{3^{10}(3^4+1)}{3^4(3^4+1)}}=\sqrt{3^6}$$

$$=\sqrt{(3^3)^2}=3^3=\mathbf{27}$$

04 Action 이중근호의 변형을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$\sqrt{x}=a+\frac{1}{a}$에서 $\sqrt{x}=a+a^{-1}$의 양변을 제곱하면

$x=a^2+2+a^{-2}$

이때 $\sqrt{2x-4+2\sqrt{x^2-4x}}=8$에서

$$\sqrt{2x-4+2\sqrt{x^2-4x}}=\sqrt{x+(x-4)+2\sqrt{x(x-4)}}$$

$$=\sqrt{x}+\sqrt{x-4}$$

$$=a+a^{-1}+\sqrt{a^2+2+a^{-2}-4}$$

$$=a+a^{-1}+\sqrt{a^2+a^{-2}-2}$$

$$=a+a^{-1}+\sqrt{(a-a^{-1})^2}$$

$$=a+a^{-1}-(a-a^{-1})\ (\because 0<a<1)$$

$$=2a^{-1}$$

따라서 $2a^{-1}=8$이므로 $\frac{2}{a}=8$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

주의

$\sqrt{(a-a^{-1})^2}=|a-a^{-1}|$이므로 $a<a^{-1}$일 때는 $\sqrt{(a-a^{-1})^2}=-(a-a^{-1})$이다.

여기서는 $0<a<1$이므로 $a<a^{-1}$이다. (a 대신 적당한 수, 예를 들어 $\frac{1}{2}$ 정도를 대입해서 확인해 본다.)

그러므로 $\sqrt{(a-a^{-1})^2}=a-a^{-1}$으로 풀지 않도록 주의하자.

개념 다시보기 이중근호의 변형

❶ $a>0$, $b>0$일 때 $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

❷ $a>b>0$일 때 $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

05 Action 거듭제곱근의 성질 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$을 이용한다.

직사각형의 대각선의 길이를 l이라고 하면

$l^2=(\sqrt[4]{9})^2+(\sqrt[4]{8})^2=\sqrt[4]{9^2}+\sqrt[4]{8^2}$

$=\sqrt{9}+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$

$\therefore l=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{1}$

06 Action 우변을 정리하여 좌변과 비교한다.

$\sqrt[12]{a^{5k}}=\sqrt{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^5}}}$에서

$$\sqrt{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^5}}}=\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}\times\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^5}}}$$

$$=\sqrt{a}\times\sqrt[2\times3]{a^2}\times\sqrt[2\times3\times4]{a^5}$$

$$=\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[24]{a^5}$$

$$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{5}{24}}$$

$$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{24}}=a^{\frac{25}{24}}$$

따라서 $\sqrt[12]{a^{5k}}=a^{\frac{5}{12}k}=a^{\frac{25}{24}}$이므로

$\frac{5}{12}k=\frac{25}{24}$ $\therefore k=\frac{5}{2}$

07 Action 지수를 통일하여 밑의 크기를 비교한다.

(i) $A=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{12}}=(3^4)^{\frac{1}{12}}=81^{\frac{1}{12}}$

$B=4^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{3}{12}}=(4^3)^{\frac{1}{12}}=64^{\frac{1}{12}}$ $\therefore A>B$

(ii) $B=4^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{5}{20}}=(4^5)^{\frac{1}{20}}=1024^{\frac{1}{20}}$

$C=5^{\frac{1}{5}}=5^{\frac{4}{20}}=(5^4)^{\frac{1}{20}}=625^{\frac{1}{20}}$ $\therefore B>C$

(iii) $C=5^{\frac{1}{5}}=5^{\frac{6}{30}}=(5^6)^{\frac{1}{30}}=15625^{\frac{1}{30}}$

$D=6^{\frac{1}{6}}=6^{\frac{5}{30}}=(6^5)^{\frac{1}{30}}=7776^{\frac{1}{30}}$ $\therefore C>D$

(i), (ii), (iii)으로부터 $A>B>C>D$

참고

두 수의 크기를 비교할 때, 밑을 같게 할 수 없으면 지수를 같게 한다.

LECTURE 세 수 비교하기

두 수를 비교할 때는 두 수의 지수를 통일시키기가 비교적 쉽지만 세 수 이상일 때는 지수를 통일시키기가 다소 어렵다.
예를 들어 07번 문제에서 네 수의 지수를 모두 통일시키면 $(3^{20})^{\frac{1}{60}}$, $(4^{15})^{\frac{1}{60}}$, $(5^{12})^{\frac{1}{60}}$, $(6^{10})^{\frac{1}{60}}$으로 밑이 너무 커 비교가 곤란하다. 이럴 때는 풀이에서와 같이 두 수씩 짝을 지어 대소를 비교해야 하는데, 세 수 A, B, C의 대소를 비교한다고 할 때 $A>B$, $B>C$이면 $A>B>C$이지만 $A>B$, $C>B$이면 다시 A와 C를 비교하여 $A>C>B$인지 $C>A>B$인지 정해야 한다.

교육청 기출

08 Action 지수법칙 $a^p a^q=a^{p+q}$을 이용한다.

피자 2조각을 굽는 데 걸리는 시간을 t_1, 8조각을 굽는 데 걸리는 시간을 t_2라고 하면

$t_1=1.2\times 2^{0.5}$

$t_2=1.2\times 8^{0.5}=1.2\times 2^{1.5}$

$=1.2\times 2\times 2^{0.5}=2\times 1.2\times 2^{0.5}$

$=2t_1$ ($1.2\times 2^{0.5}\rightarrow t_1$)

따라서 피자 8조각을 굽는 데 걸리는 시간은 2조각을 굽는 데 걸리는 시간의 **2**배이다.

교육청 기출

09 Action $256^{-\frac{1}{n}}$이 자연수가 되려면 $-n$은 8의 약수이어야 한다.

$\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{n}}=(2^{-8})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{8}{n}}$에서 집합 A의 원소는 $2^{-\frac{8}{n}}$ 꼴의 수이므로 이 수가 자연수이려면 $-n$은 8의 약수이어야 한다.

따라서 $-n$의 값은 1, 2, 4, 8이고 이때 x의 값은

$2^{\frac{8}{1}}=2^8=256$, $2^{\frac{8}{2}}=2^4=16$, $2^{\frac{8}{4}}=2^2=4$, $2^{\frac{8}{8}}=2$

따라서 집합 A의 원소 중 자연수는 모두 **4**개이다.

평가원 기출

10 Action 곱셈 공식을 이용하여 식을 간단히 한다.

$2^{x+y}=X$, $2^{x-y}=Y$로 놓으면

$(2^{x+y}+2^{x-y})^2-(2^{x+y}-2^{x-y})^2$

$=(X+Y)^2-(X-Y)^2$

$=X^2+2XY+Y^2-X^2+2XY-Y^2$

$=4XY=2^2\times 2^{x+y}\times 2^{x-y}$

$=2^{2+x+y+x-y}=\mathbf{2^{2x+2}}$

11 Action 공통인수를 묶어내어 약분한다.

주어진 식의 분모, 분자를 각각 정리하면

$$\frac{a^6+a^5+a^4+a^3+a^2}{a^{-9}+a^{-8}+a^{-7}+a^{-6}+a^{-5}}=\frac{a^2(a^4+a^3+a^2+a+1)}{a^{-9}(1+a+a^2+a^3+a^4)}$$

$$=\frac{a^2}{a^{-9}}=a^{2-(-9)}=\mathbf{a^{11}}$$

12 Action $x=3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}$의 양변을 제곱한다.

$x=3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}$의 양변을 제곱하면

$x^2=3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}-2$ $\therefore x^2+2=3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}$

다시 이 식의 양변을 제곱하면

$x^4+4x^2+4=3+3^{-1}+2$

$\therefore x^4+4x^2=5+\frac{1}{3}-4=\mathbf{\frac{4}{3}}$

13 Action 주어진 식 좌변의 분모, 분자에 각각 2^x을 곱한다.

$\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=3$에서 좌변의 분모, 분자에 각각 2^x을 곱하면

$\frac{2^x(2^x+2^{-x})}{2^x(2^x-2^{-x})}=3$, $\frac{(2^x)^2+1}{(2^x)^2-1}=3$

$(2^x)^2=(2^2)^x=4^x$이므로

$\frac{4^x+1}{4^x-1}=3$, $4^x+1=3(4^x-1)$, $2\times 4^x=4$ $\therefore 4^x=2$

따라서 $4^{-x}=\frac{1}{4^x}=\frac{1}{2}$이므로

$4^x+4^{-x}=2+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{5}{2}}$

14 Action 주어진 식의 분모, 분자에 각각 3^x을 곱한다.

$9^x=3^{2x}=\sqrt{2}-1$이므로

$3^{-2x}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$

이때 주어진 식의 분모, 분자에 각각 3^x을 곱하면

$$\frac{3^x}{3^{-x}-3^{-3x}}=\frac{3^x\cdot 3^x}{3^x(3^{-x}-3^{-3x})}=\frac{3^{2x}}{1-3^{-2x}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}$$

15 Action 곱셈 공식을 변형하여 식의 값을 구한다.

$a^x=\sqrt[4]{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$에서

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$이므로

$a^x=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $\therefore a^{2x}=(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}})^2=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\therefore \frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}$

$=a^{2x}-1+a^{-2x}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$=\mathbf{2\sqrt{3}-1}$

평가원 기출

16 Action 지수법칙을 이용하여 a, b, c의 값을 각각 구한다.

$a^6=3$에서 양변을 $\frac{1}{6}$제곱하면

$(a^6)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{6}}$ $\therefore a=3^{\frac{1}{6}}$ …… ㉠

$b^5=7$에서 양변을 $\frac{1}{5}$제곱하면

$(b^5)^{\frac{1}{5}}=7^{\frac{1}{5}}$ $\therefore b=7^{\frac{1}{5}}$ …… ㉡

$c^2=11$에서 양변을 $\frac{1}{2}$제곱하면

$(c^2)^{\frac{1}{2}}=11^{\frac{1}{2}}$ $\therefore c=11^{\frac{1}{2}}$ …… ㉢

㉠×㉡×㉢에서 양변을 n제곱하면

$(abc)^n=(3^{\frac{1}{6}}\times 7^{\frac{1}{5}}\times 11^{\frac{1}{2}})^n=3^{\frac{n}{6}}\times 7^{\frac{n}{5}}\times 11^{\frac{n}{2}}$

이때 $3^{\frac{n}{6}}\times 7^{\frac{n}{5}}\times 11^{\frac{n}{2}}$이 자연수가 되도록 하는 최소의 자연수 n의 값은 6, 5, 2의 최소공배수이므로 **30**이다.

참고

주어진 수가 자연수이려면 모든 지수가 자연수이어야 한다.

17 Action 지수법칙을 이용한다.

$a^b=b^a$에서 양변에 $\frac{1}{a}$제곱을 하면

$(a^b)^{\frac{1}{a}}=(b^a)^{\frac{1}{a}}$ $\therefore a^{\frac{b}{a}}=b$

이때 $b=25a$이므로

$a^{\frac{25a}{a}}=25a$, $a^{25}=25a$ $\therefore a^{24}=25$ ($\because a>0$)

$25=5^2$이고, 양변에 $\frac{1}{24}$제곱을 하면

$(a^{24})^{\frac{1}{24}}=(5^2)^{\frac{1}{24}}$ $\therefore a=5^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{5}$

18 Action 주어진 조건식을 변형하여 밑을 통일한다.

$2^x=a$에서 양변을 $\frac{1}{x}$제곱하면

$(2^x)^{\frac{1}{x}}=a^{\frac{1}{x}}$ $\therefore 2=a^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$5^y=a$에서 양변을 $\frac{1}{y}$제곱하면

$(5^y)^{\frac{1}{y}}=a^{\frac{1}{y}}$ $\therefore 5=a^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$10^z=a$에서 양변을 $\frac{1}{z}$제곱하면

$(10^z)^{\frac{1}{z}}=a^{\frac{1}{z}}$ $\therefore 10=a^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡×㉢에서

$2\times 5\times 10=a^{\frac{1}{x}}\times a^{\frac{1}{y}}\times a^{\frac{1}{z}}=a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$이므로

$100=a^2$ $\therefore a=10$ ($\because a>0$)

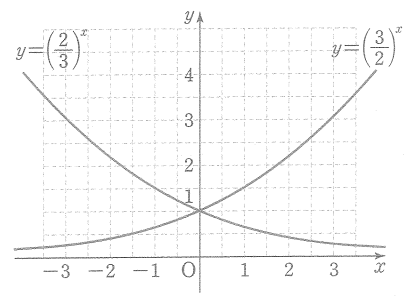
2. 지수함수

개념 강화 드릴 ❶

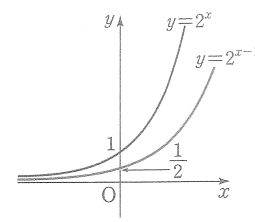
본문 81쪽

01

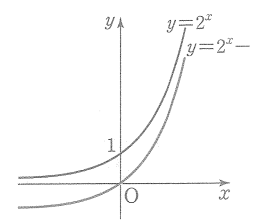
x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$	…	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	…
$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$	…	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	…



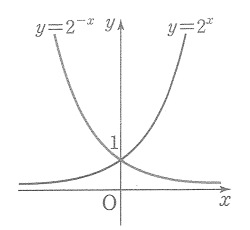
02 (1) 함수 $y=2^{x-1}$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것으로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



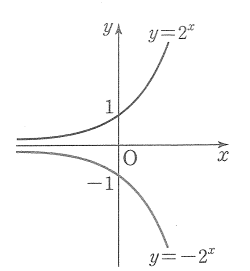
(2) 함수 $y=2^x-1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것으로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



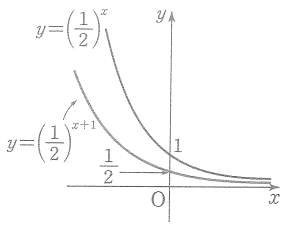
(3) 함수 $y=2^{-x}$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 것으로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



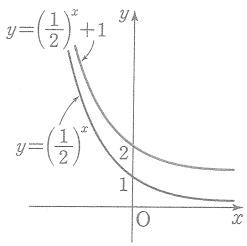
(4) 함수 $y=-2^x$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 것으로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



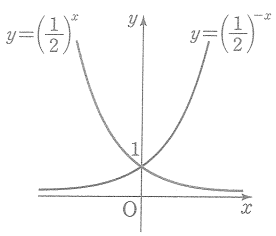
03 (1) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프를 x축 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것으로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



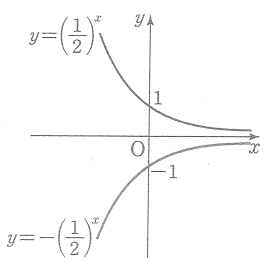
(2) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+1$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프를 y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것으로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 것으로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



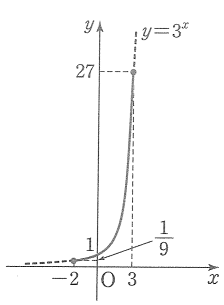
(4) 함수 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 것으로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



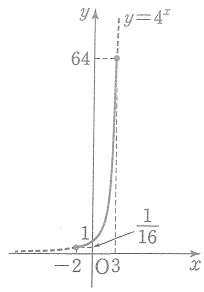
참고

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right\}^{x}=2^{x}$이므로 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$의 그래프는 $y=2^{x}$의 그래프와 같다.

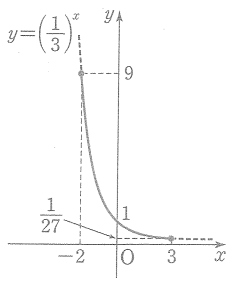
04 (1) 함수 $y=3^{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 최댓값은 $x=3$일 때 **27**,
최솟값은 $x=-2$일 때 $\frac{1}{9}$이다.



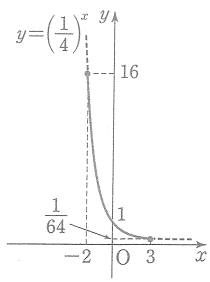
(2) 함수 $y=4^{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 최댓값은 $x=3$일 때 **64**,
최솟값은 $x=-2$일 때 $\frac{1}{16}$이다.



(3) 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 최댓값은 $x=-2$일 때 **9**,
최솟값은 $x=3$일 때 $\frac{1}{27}$이다.



(4) 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 최댓값은 $x=-2$일 때 **16**, 최솟값은 $x=3$일 때 $\frac{1}{64}$이다.



05 $y=2^{2x}-2^{x+1}$, 즉 $y=(2^{x})^{2}-2\times 2^{x}$에서 2^{x}을 t로 치환하면
$y=t^{2}-2t$
이때 $0\le x\le 2$에서 $2^{0}\le 2^{x}\le 2^{2}$ $\therefore 1\le t\le 4$
따라서 $y=t^{2}-2t=(t-1)^{2}-1$은
$t=4$일 때 최대이고, 최댓값은 $y=(4-1)^{2}-1=8$
$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은 $y=(1-1)^{2}-1=-1$

확인 문제 본문 82~89쪽

01-1 Action $0<a<1$ ⇨ $y=a^{x}$은 감소함수

ㄱ. 지수함수 $y=a^{x}$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수의 집합이므로 정의역은 $\{x\mid x$는 모든 실수$\}$이고, 치역은 $\{y\mid y>0\}$이다. (참)

ㄴ. $\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$이므로 그래프는 점 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$을 지난다. (거짓)

ㄷ. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$은 감소함수이므로 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다. (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

02-1 Action $f(1)=2$, $f(2)=4$에서 a, b의 값을 구한다.

$f(x)=5^{ax+b}$이므로

$f(1)=2$에서 $5^{a+b}=2$ $\therefore 5^a5^b=2$ ····· ㉠

$f(2)=4$에서 $5^{2a+b}=4$ $\therefore 5^{2a}5^b=4$ ····· ㉡

㉡÷㉠에서 $5^a=2$

$\therefore f(3)=5^{3a+b}=5^{3a}5^b=5^a5^{2a}5^b=2\times4=\mathbf{8}$

02-2 Action $a^m\times a^n=a^{m+n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$

(1) $f(x)=2^x$이므로

$\sqrt{f(a)f(b)}=\sqrt{2^a\times2^b}=(2^{a+b})^{\frac{1}{2}}$

$=2^{\frac{a+b}{2}}=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

(2) 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(m^2)=k$로 놓으면 $f(k)=m^2$이고, $g(n^3)=t$로 놓으면 $f(t)=n^3$이다.

이때 $f(p)=m$, $f(q)=n$에서 $a^p=m$, $a^q=n$이므로

$m^2=(a^p)^2=a^{2p}=f(2p)$

$n^3=(a^q)^3=a^{3q}=f(3q)$

따라서 $k=2p$, $t=3q$이므로 $g(m^2)=2p$, $g(n^3)=3q$

$\therefore g(m^2)+g(n^3)=\mathbf{2p+3q}$

03-1 Action $y=\frac{3^x}{9}-1$을 $y=a^{x-m}+n$ 꼴로 바꾼다.

$\frac{3^x}{9}-1=3^{x-2}-1$이므로 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축 방향으로 2만큼, y축 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 함수 $y=3^x$의 그래프가 함수 $y=\frac{3^x}{9}-1$의 그래프와 포개진다.

$\therefore \boldsymbol{p=2}, \boldsymbol{q=-1}$

다른 풀이

함수 $y=3^x$에 x 대신 $x-p$, y 대신 $y-q$를 대입하면

$y-q=3^{x-p}$, $y=3^{x-p}+q$

$y=3^x\times3^{-p}+q$ $\therefore y=\frac{1}{3^p}\times3^x+q$ ····· ㉠

이때 ㉠과 $y=\frac{3^x}{9}-1$은 같은 식이므로

$\frac{1}{3^p}=\frac{1}{9}$, $q=-1$ $\therefore p=2$, $q=-1$

개념 다시보기 평행이동과 대칭이동

함수 $y=f(x)$의 그래프를

(1) x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동시키면 $y-n=f(x-m)$

(2) x축에 대하여 대칭이동시키면 $-y=f(x)$

y축에 대하여 대칭이동시키면 $y=f(-x)$

원점에 대하여 대칭이동시키면 $-y=f(-x)$

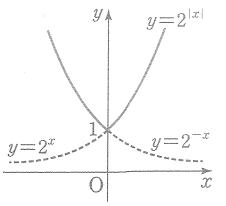
03-2 Action 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 이용하여 그린다.

(1) $y=2^{|x|}$은

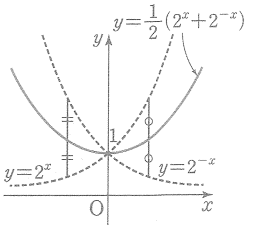
$x\geq0$일 때 $y=2^x$

$x<0$일 때 $y=2^{-x}$

따라서 함수 $y=2^{|x|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

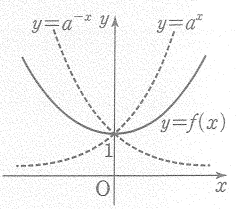


(2) 함수 $y=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})$의 그래프는 $y=2^x$과 $y=2^{-x}$의 그래프를 그리고 임의의 x에 대하여 두 함숫값의 평균을 잡아 곡선으로 이으면 오른쪽 그림과 같다.



LECTURE 함수 $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$의 그래프 $(a>1)$

(1) 두 함수 $y=a^x$, $y=a^{-x}$에서 함숫값의 평균이 $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$의 함숫값이 되므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $x=0$일 때 최솟값은 1이고, 최댓값은 없다.

(3) $f(x)=f(-x)$이므로 y축에 대하여 대칭이다.

04-1 Action 주어진 세 수의 밑을 통일하고, 밑이 1보다 큰지, 작은지 판단한다.

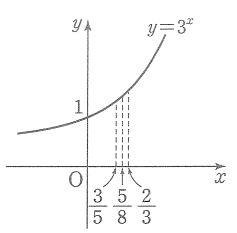
(1) 세 수 $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[5]{27}$, $\sqrt[8]{243}$을 밑이 3인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$\sqrt[3]{9}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{27}=(3^3)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{3}{5}}$,

$\sqrt[8]{243}=(3^5)^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{5}{8}}$

이때 함수 $y=3^x$의 밑 3은 1보다 크고, 지수의 크기를 비교하면 $\frac{3}{5}<\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$이므로 오른쪽 그림에서 $3^{\frac{3}{5}}<3^{\frac{5}{8}}<3^{\frac{2}{3}}$

$\therefore \sqrt[5]{27}<\sqrt[8]{243}<\sqrt[3]{9}$



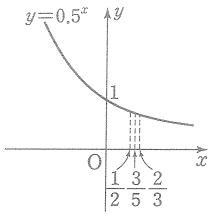
(2) 세 수 $\sqrt{0.5}$, $\sqrt[3]{0.25}$, $\sqrt[5]{0.125}$를 밑이 0.5인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$\sqrt{0.5}=0.5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{0.25}=(0.5^2)^{\frac{1}{3}}=0.5^{\frac{2}{3}}$,

$\sqrt[5]{0.125}=(0.5^3)^{\frac{1}{5}}=0.5^{\frac{3}{5}}$

이때 함수 $y=0.5^x$의 밑 0.5는 0과 1 사이의 수이고, 지수의 크기를 비교하면 $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$이므로 오른쪽 그림에서 $0.5^{\frac{2}{3}}<0.5^{\frac{3}{5}}<0.5^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \sqrt[3]{0.25}<\sqrt[5]{0.125}<\sqrt{0.5}$



05-1 Action 주어진 함수를 $y=pa^x$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

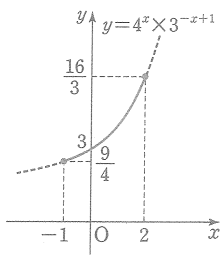
$4^x\times3^{-x+1}=3\times4^x\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^x$

이때 함수 $y=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 $-1\le x\le2$에서 주어진 함수의

최댓값은 $x=2$일 때 $3\times\left(\frac{4}{3}\right)^2=3\times\frac{16}{9}=\frac{16}{3}$

최솟값은 $x=-1$일 때 $3\times\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}=3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$



05-2 Action $a>1$일 때와 $0<a<1$일 때로 경우를 나누어 생각한다.

(i) $a>1$일 때

최댓값은 $f(2)$이고, 최솟값은 $f(0)$이다.

이때 $f(2)=4f(0)$에서 $a^5=4a^3$이므로

$a^2=4$ $\therefore a=2\ (\because a>0)$

(ii) $0<a<1$일 때

최댓값은 $f(0)$이고, 최솟값은 $f(2)$이다.

이때 $f(0)=4f(2)$에서 $a^3=4a^5$이므로

$a^2=\frac{1}{4}$ $\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$

(i), (ii)로부터 $\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

06-1 Action 밑이 1보다 작으므로 y는 지수가 최대일 때 최솟값을 가진다.

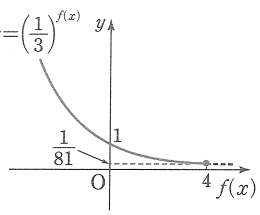
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3}$에서 $f(x)=-x^2-2x+3$이라고 하면

$f(x)=-(x+1)^2+4$에서 함수 $y=f(x)$의 최댓값은 $x=-1$일 때 4이다. $\therefore f(x)\le4$

이때 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$은 오른쪽 그림과 같이 감소함수이므로

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$의 최솟값은

$f(x)=4$일 때 $\frac{1}{81}$이다.



06-2 Action $0\le x\le3$일 때 지수 x^2-4x+2의 범위를 구한다.

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+2}$에서 $f(x)=x^2-4x+2$라고 하면

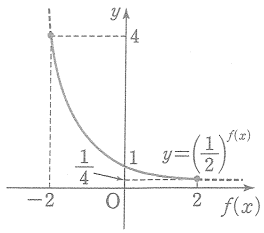
$f(x)=(x-2)^2-2$에서 $0\le x\le3$일 때 $-2\le f(x)\le2$

이때 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은 오른쪽 그림과 같이 감소함수이므로

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$의 최댓값은

$f(x)=-2$일 때 4, 최솟값은

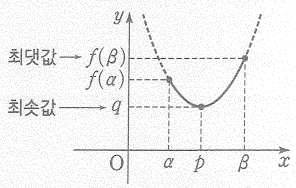
$f(x)=2$일 때 $\frac{1}{4}$



LECTURE 정의역이 제한된 이차함수의 최대 · 최소

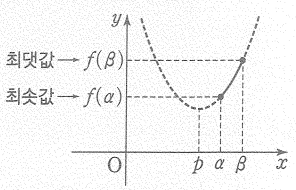
$\alpha\le x\le\beta$에서 정의된 이차함수 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값은

❶ 꼭짓점의 x좌표가 정의역에 포함될 때,
꼭짓점의 y좌표, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다. ⇨ [그림 1]



[그림 1]

❷ 꼭짓점의 x좌표가 정의역에 포함되지 않을 때,
$f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값이고, 작은 값이 최솟값이다. ⇨ [그림 2]



[그림 2]

쌤파특강 **확인 01** 본문 88 쪽

(1) $y=a^{-x^2+2x+1}$에서 $f(x)=-x^2+2x+1$이라고 하면

$f(x)=-(x-1)^2+2$에서 함수 $y=f(x)$는 최솟값은 없고, 최댓값은 $x=1$일 때 2이다.

그런데 y 역시 최댓값을 가지므로 $a>1$

따라서 $a^2=9$에서 $a=3$

(2) $y=a^{x^2-2x+3}$에서 $f(x)=x^2-2x+3$이라고 하면

$f(x)=(x-1)^2+2$에서 함수 $y=f(x)$는 최댓값은 없고, 최솟값은 $x=1$일 때 2이다.

그런데 y는 최댓값을 가지므로 $0<a<1$

따라서 $a^2=\frac{1}{4}$에서 $a=\frac{1}{2}$

(3) $y=a^{-x^2+4x-6}$에서 $f(x)=-x^2+4x-6$이라고 하면

$f(x)=-(x-2)^2-2$에서 함수 $y=f(x)$는 최솟값은 없고, 최댓값은 $x=2$일 때 -2이다.

그런데 y는 최솟값을 가지므로 $0<a<1$

따라서 $a^{-2}=4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$에서 $a=\frac{1}{2}$

07-1 Action 밑을 같게 한 다음 3^x을 t로 치환한다.

$y=9^x+2\times3^x-1=(3^x)^2+2\times3^x-1$

에서 3^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$y=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$

이때 $-2\le x\le0$에서

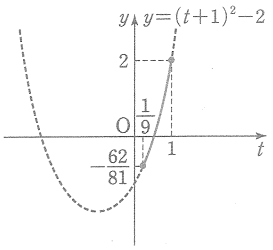
$3^{-2}\le3^x\le3^0$ $\therefore \frac{1}{9}\le t\le1$

따라서 함수 $y=(t+1)^2-2$의 최댓값은 $t=1$일 때

$y=(1+1)^2-2=2$

최솟값은 $t=\frac{1}{9}$일 때

$y=\left(\frac{1}{9}+1\right)^2-2=-\frac{62}{81}$



오답 피하기

3^x을 t로 치환해서 얻은 이차함수는 지수함수와 달리 항상 증가하거나 항상 감소하는 함수가 아니므로 무조건 구간의 양 끝에 있는 값을 대입하여 큰 값을 최댓값, 작은 값을 최솟값으로 하면 안 된다. 꼭짓점의 t좌표가 t값의 범위 안에 있으면 꼭짓점에서 최댓값 또는 최솟값을 가지므로 구간의 양 끝점뿐만 아니라 꼭짓점에서의 함숫값도 따져야 한다.

07-2 Action $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2$이므로 공통 부분인 2^x+2^{-x}을 t로 치환한다.

$y=4^x+4^{-x}-6(2^x+2^{-x})+7$

$=(2^x+2^{-x})^2-2-6(2^x+2^{-x})+7$

$=(2^x+2^{-x})^2-6(2^x+2^{-x})+5$

에서 2^x+2^{-x}을 t로 치환하면

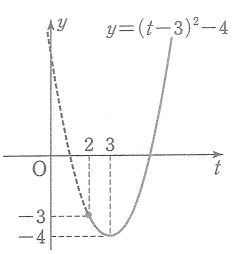
$y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4$

이때 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로

$t=2^x+2^{-x}\ge2\sqrt{2^x\times2^{-x}}=2$

(단, 등호는 $2^x=2^{-x}$일 때 성립)

따라서 함수 $y=(t-3)^2-4$의 최솟값은 $t=3$일 때 -4



주의

이 문제에서 2^x을 t로 치환하면 $y=t^2+\frac{1}{t^2}-6\left(t+\frac{1}{t}\right)+7$과 같이 함수식이 복잡하다. 따라서 a^x만을 치환하려 하지 말고 반복되는 같은 부분이 있는지를 확인하여 치환하도록 하자.

개념 다시보기 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$인 두 실수 a, b에 대하여

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

개념 강화 드릴 ②

본문 91쪽

01 (1) $2^x=\frac{1}{8}$에서 $2^x=\left(\frac{1}{2}\right)^3=2^{-3}$

이때 밑이 같으므로 $x=-3$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=128$에서 $2^{-x-1}=2^7$

이때 밑이 같으므로 $-x-1=7$ $\therefore x=-8$

(3) $3^{2x}=\frac{1}{81}$에서 $3^{2x}=\left(\frac{1}{3}\right)^4=3^{-4}$

이때 밑이 같으므로 $2x=-4$ $\therefore x=-2$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}=\frac{1}{64}$에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}=\left(\frac{1}{4}\right)^3$

이때 밑이 같으므로 $-x=3$ $\therefore x=-3$

02 (1) $2^{5-x}=2^{x-1}$에서 밑이 같으므로

$5-x=x-1$, $2x=6$ $\therefore x=3$

(2) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4x-3}$에서 밑이 같으므로

$x^2=4x-3$, $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$

(3) $3^{2x-1}=9^{4x+3}$에서 $3^{2x-1}=(3^2)^{4x+3}=3^{8x+6}$

이때 밑이 같으므로 $2x-1=8x+6$

$6x=-7$ $\therefore x=-\frac{7}{6}$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=2^{-3x+2}$에서 $2^{-x^2}=2^{-3x+2}$

이때 밑이 같으므로 $-x^2=-3x+2$

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

03 $3^{2x-1}=x^{2x-1}$에서

(i) 밑이 같은 경우 : $x=3$

(ii) 지수가 0인 경우 : $2x-1=0$에서 $x=\frac{1}{2}$

(i), (ii)로부터 $x=3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

04 $9^x+3^x-12=0$에서 $9^x=(3^x)^2$이므로 3^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$t^2+t-12=0$, $(t+4)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

즉 $3^x=3=3^1$이므로 $x=1$

05

지수부등식	밑의 크기	(밑) □ 1	부등식의 해
❶ $2^x<2^2$	2	>	$x<2$
❷ $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\frac{1}{3}$	<	$x<3$
❸ $\left(\frac{5}{4}\right)^x\le\left(\frac{5}{4}\right)^5$	$\frac{5}{4}$	>	$x\le5$
❹ $\left(\frac{8}{9}\right)^x\ge\left(\frac{8}{9}\right)^7$	$\frac{8}{9}$	<	$x\le7$

❶ (밑)>1이므로 부등호의 방향은 그대로이다.
$2^x<2^2$ $\therefore x<2$

❷ 0<(밑)<1이므로 부등호의 방향이 반대로 바뀐다.
$\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^3$ $\therefore x<3$

❸ (밑)>1이므로 부등호의 방향은 그대로이다.
$\left(\frac{5}{4}\right)^x\le\left(\frac{5}{4}\right)^5$ $\therefore x\le5$

❹ 0<(밑)<1이므로 부등호의 방향이 반대로 바뀐다.
$\left(\frac{8}{9}\right)^x\ge\left(\frac{8}{9}\right)^7$ $\therefore x\le7$

06 (1) $2^{-x}>\frac{1}{64}$에서 $\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^6=2^{-6}$이므로
$2^{-x}>2^{-6}$
이때 (밑)>1이므로
$-x>-6$ $\therefore \boldsymbol{x<6}$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}<81$에서 $81=3^4=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$이므로
$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$
이때 0<(밑)<1이므로
$x+1>-4$ $\therefore \boldsymbol{x>-5}$

(3) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\ge\frac{16}{81}$에서 $\frac{16}{81}=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$이므로
$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\ge\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$
이때 (밑)>1이므로
$2x\ge-4$ $\therefore \boldsymbol{x\ge-2}$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}\le2^{3x+1}$에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2}=2^{-2x^2}$이므로
$2^{-2x^2}\le2^{3x+1}$
이때 (밑)>1이므로
$-2x^2\le3x+1$, $2x^2+3x+1\ge0$
$(2x+1)(x+1)\ge0$ $\therefore \boldsymbol{x\le-1}$ 또는 $\boldsymbol{x\ge-\frac{1}{2}}$

07 $\left(\frac{1}{25}\right)^x-6\left(\frac{1}{5}\right)^x+5\le0$에서 $\left(\frac{1}{25}\right)^x=\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2$이므로
$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2-6\left(\frac{1}{5}\right)^x+5\le0$
이때 $\left(\frac{1}{5}\right)^x$을 $t\,(t>0)$로 치환하면
$t^2-6t+5\le0$, $(t-1)(t-5)\le0$ $\therefore 1\le t\le5$
즉 $\left(\frac{1}{5}\right)^0\le\left(\frac{1}{5}\right)^x\le\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$이고, 이때 0<(밑)<1이므로
$\boldsymbol{-1\le x\le0}$

확인 문제 본문 92~97쪽

08-1 Action 양변의 밑을 같게 해서 $a^{f(x)}=a^{g(x)}\,(a>0,\ a\ne1)$꼴로 변형한다.

(1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+4}=\left(\frac{9}{4}\right)^x$에서 $\left(\frac{9}{4}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2x}$이므로
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2x}$
이때 양변의 밑이 같으므로
$-3x+4=-2x$ $\therefore \boldsymbol{x=4}$

(2) $\frac{3^{x^2+1}}{3^{x-1}}=81$에서 $3^{x-1}\ne0$이므로 양변에 3^{x-1}을 곱하면
$3^{x^2+1}=81\times3^{x-1}=3^4\times3^{x-1}=3^{x+3}$
이때 양변의 밑이 같으므로
$x^2+1=x+3$, $x^2-x-2=0$
$(x+1)(x-2)=0$ $\therefore \boldsymbol{x=-1}$ 또는 $\boldsymbol{x=2}$

다른 풀이
$\frac{3^{x^2+1}}{3^{x-1}}=3^{x^2+1-(x-1)}=3^{x^2-x+2}$이므로 $3^{x^2-x+2}=3^4$
이때 양변의 밑이 같으므로
$x^2-x+2=4$, $x^2-x-2=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

08-2 Action 지수가 같은 경우에는 밑이 같을 때와 지수가 0일 때로 나누고, 밑이 같은 경우에는 지수가 같을 때와 밑이 1일 때로 나눈다.

(1) $(2x-1)^{x-3}=(3x-5)^{x-3}$은 지수가 같으므로 방정식이 성립하려면 밑이 같거나 지수가 0이어야 한다.
(i) 밑이 같은 경우
$2x-1=3x-5$ $\therefore x=4$
(ii) 지수가 0인 경우
$x-3=0$ $\therefore x=3$
(i), (ii)로부터 $\boldsymbol{x=3}$ 또는 $\boldsymbol{x=4}$

(2) $(x+2)^{3-2x}=(x+2)^{x^2}$은 양변의 밑이 $x+2$로 같으므로 방정식이 성립하려면 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) 지수가 같은 경우

$3-2x=x^2$, $x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=1$ ($\because x>-2$)

(ii) 밑이 1인 경우

$x+2=1$ $\therefore x=-1$

(i), (ii)로부터 $\boldsymbol{x=-1}$ 또는 $\boldsymbol{x=1}$

09-1 Action a^x 꼴이 반복될 때에는 a^x을 $t(t>0)$로 치환한다.

(1) $4^x-5\times2^{x-1}+1=0$에서 $(2^x)^2-\frac{5}{2}\times2^x+1=0$

이때 2^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$, $2t^2-5t+2=0$

$(2t-1)(t-2)=0$ $\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

따라서 $2^x=\frac{1}{2}=2^{-1}$ 또는 $2^x=2=2^1$이므로

$\boldsymbol{x=-1}$ 또는 $\boldsymbol{x=1}$

(2) $2^x+2^{2-x}-5=0$에서 $2^x+4\times2^{-x}-5=0$

양변에 2^x을 곱하면 $(2^x)^2+4-5\times2^x=0$

이때 2^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$t^2-5t+4=0$, $(t-1)(t-4)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=4$

따라서 $2^x=1=2^0$ 또는 $2^x=4=2^2$이므로

$\boldsymbol{x=0}$ 또는 $\boldsymbol{x=2}$

09-2 Action $2^x=X$, $2^y=Y(X>0, Y>0)$로 치환한다.

$\begin{cases}2^x-2^y=4\\2^{x+y}=32\end{cases}$에서 $2^{x+y}=2^x\times2^y$이므로

$2^x=X$, $2^y=Y(X>0, Y>0)$로 치환하면

$X-Y=4$ …… ㉠, $XY=32$ …… ㉡

㉠에서 $Y=X-4$이고, 이를 ㉡에 대입하면

$X(X-4)=32$, $X^2-4X-32=0$

$(X+4)(X-8)=0$ $\therefore X=8$ ($\because X>0$)

$X=8$을 ㉠에 대입하면 $Y=4$

따라서 $2^x=8=2^3$, $2^y=4=2^2$이므로 $\boldsymbol{x=3, y=2}$

다른 풀이

$2^{x+y}=32=2^5$에서 $x+y=5$ …… ㉠

즉 $y=5-x$이고, 이를 $2^x-2^y=4$에 대입하면

$2^x-2^{5-x}=4$ $\therefore 2^x-32\times2^{-x}-4=0$

양변에 2^x을 곱하면 $(2^x)^2-32-4\times2^x=0$

이때 2^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$t^2-4t-32=0$, $(t+4)(t-8)=0$ $\therefore t=8$ ($\because t>0$)

따라서 $2^x=8=2^3$에서 $x=3$이고 ㉠에 의해 $y=2$

10-1 Action 3^x을 $t(t>0)$로 치환하여 얻은 t에 대한 이차방정식은 서로 다른 양의 근을 가진다.

$9^x=4\times3^x+k$에서 $(3^x)^2=4\times3^x+k$

이때 3^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$t^2=4t+k$ $\therefore t^2-4t-k=0$ …… ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 양수인 근을 가져야 한다.

(i) 방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(-k)=4+k>0$ $\therefore k>-4$

(ii) 방정식 ㉠의 두 근을 α, β라고 하면 두 근의 합이 양수이어야 한다. 이때 $\alpha+\beta=4>0$이므로 k의 값에 관계없이 항상 성립한다.

(iii) 방정식 ㉠의 두 근의 곱이 양수이어야 한다.

이때 $\alpha\beta=-k$이므로 $-k>0$에서 $k<0$

(i), (ii), (iii)으로부터 $\boldsymbol{-4<k<0}$

다른 풀이

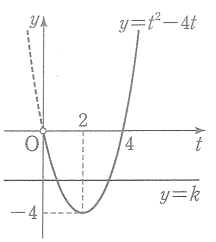
$9^x=4\times3^x+k$에서 3^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$t^2=4t+k$ $\therefore t^2-4t=k$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 근을 가지려면 함수 $y=t^2-4t(t>0)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 2개이어야 한다.

따라서 오른쪽 그림에서

$-4<k<0$



개념 다시보기 이차방정식의 실근의 조건

계수가 실수인 이차방정식의 서로 다른 두 근을 α, β, 판별식을 D라 할 때

❶ 서로 다른 두 근이 모두 양수일 조건

(i) 두 근을 가지므로 $D>0$

(ii) 두 근이 모두 양수이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

❷ 서로 다른 두 근이 모두 음수일 조건

(i) 두 근을 가지므로 $D>0$

(ii) 두 근이 모두 음수이므로 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

❸ 서로 다른 두 근이 서로 다른 부호일 조건

$\alpha\beta<0$

10-2 Action 두 근의 비가 1 : 2이므로 두 근을 α, 2α로 놓는다.

$2^{2x}+k\times2^x-k+44=0$에서 $(2^x)^2+k\times2^x-k+44=0$

이때 2^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$t^2+kt-k+44=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근의 비가 1 : 2이므로 두 근을 α, 2α라고 하면 방정식 ㉠의 두 근은 2^α, $2^{2\alpha}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$2^{\alpha}+2^{2\alpha}=-k$ ····· ㉡
$2^{\alpha}\times 2^{2\alpha}=-k+44$ ····· ㉢
㉢−㉡에서 $2^{\alpha}\times 2^{2\alpha}-2^{\alpha}-2^{2\alpha}=44$이므로
$2^{3\alpha}-2^{\alpha}-2^{2\alpha}-44=0$
$\therefore (2^{\alpha})^3-2^{\alpha}-(2^{\alpha})^2-44=0$
이때 2^{α}을 $X(X>0)$로 치환하면
$X^3-X^2-X-44=0$
$\therefore (X-4)(X^2+3X+11)=0$
이때 $X^2+3X+11=0$의 근은 허근이므로 $X=4$
즉 $2^{\alpha}=4=2^2$에서 $\alpha=2$이고, 이 값을 ㉡에 대입하면
$2^2+2^4=-k$, $4+16=-k$ $\therefore k=\mathbf{-20}$

참고
$f(x)=x^3-x^2-x-44$로 놓으면 $f(4)=0$이므로 인수정리에 의하여 함수 $f(x)$는 $x-4$를 인수로 가진다.
따라서 오른쪽 조립제법에 의해
$f(x)=(x-4)(x^2+3x+11)$
이다.

4	1	−1	−1	−44
		4	12	44
	1	3	11	0

11-1 Action 양변의 밑을 같게 한 다음 지수를 비교한다.
(1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x(x-1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x(x-1)}$, $\left(\frac{1}{8}\right)^{2-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3(2-x)}$이므로
$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x(x-1)}>\left(\frac{1}{2}\right)^{3(2-x)}$
이때 $0<(\text{밑})<1$이므로 $2x(x-1)<3(2-x)$에서
$2x^2-2x<6-3x$, $2x^2+x-6<0$
$(x+2)(2x-3)<0$ $\therefore \mathbf{-2<x<\frac{3}{2}}$

(2) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-9}=\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$, $\left(\frac{16}{81}\right)^{-x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-4x}$이므로
$\left(\frac{2}{3}\right)^{9}<\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-4x}$
이때 $0<(\text{밑})<1$이므로 $-4x<x^2<9$
(i) $-4x<x^2$에서 $x^2+4x>0$
$x(x+4)>0$ $\therefore x<-4$ 또는 $x>0$ ····· ㉠
(ii) $x^2<9$에서 $x^2-9<0$
$(x+3)(x-3)<0$ $\therefore -3<x<3$ ····· ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\mathbf{0<x<3}$

개념 다시보기 **이차부등식의 풀이**
이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a>0)$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하면
❶ $ax^2+bx+c>0 \iff a(x-\alpha)(x-\beta)>0$
$\iff x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
❷ $ax^2+bx+c<0 \iff a(x-\alpha)(x-\beta)<0$
$\iff \alpha<x<\beta$

11-2 Action 밑에 미지수가 포함될 때에는 $0<x<1$, $x=1$, $x>1$로 나누어 푼다.
$x^{2x^2}\le x^{7x-3}$에서
(i) $0<x<1$일 때
$2x^2\ge 7x-3$, $2x^2-7x+3\ge 0$
$(2x-1)(x-3)\ge 0$ $\therefore x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 3$
그런데 $0<x<1$이므로 $0<x\le\frac{1}{2}$
(ii) $x=1$일 때
$1^2=1^4=1$이므로 부등식이 성립한다.
(iii) $x>1$일 때
$2x^2\le 7x-3$, $2x^2-7x+3\le 0$
$(2x-1)(x-3)\le 0$ $\therefore \frac{1}{2}\le x\le 3$
그런데 $x>1$이므로 $1<x\le 3$
(i), (ii), (iii)으로부터
$\mathbf{0<x\le\frac{1}{2}}$ 또는 $\mathbf{1\le x\le 3}$

12-1 Action a^x 꼴이 반복되면 a^x을 $t(t>0)$로 치환한다.
(1) $4^{-x}+2\times 2^{-x}-3<0$에서 $4^{-x}=(2^{-x})^2$이므로
$(2^{-x})^2+2\times(2^{-x})-3<0$
이때 2^{-x}을 $t(t>0)$로 치환하면
$t^2+2t-3<0$, $(t+3)(t-1)<0$
$\therefore -3<t<1$
그런데 $t>0$이므로 $0<t<1$
즉 $0<2^{-x}<2^0$이고, 이때 (밑)$=2>1$이므로 $-x<0$
$\therefore \mathbf{x>0}$

(2) $2^{x+2}+2^{3-x}<18$에서 $4\times 2^x+8\times 2^{-x}-18<0$
이 식의 양변에 2^x을 곱하면
$4\times(2^x)^2+8-18\times 2^x<0$
이때 2^x을 $t(t>0)$로 치환하면
$4t^2-18t+8<0$, $2t^2-9t+4<0$
$(2t-1)(t-4)<0$ $\therefore \frac{1}{2}<t<4$
즉 $2^{-1}<2^x<2^2$이고, 이때 (밑)$=2>1$이므로 $\mathbf{-1<x<2}$

12-2 Action 3^x을 $t(t>0)$로 치환한다.
$9^x-30\times 3^x+81<0$에서 $(3^x)^2-30\times 3^x+81<0$
이때 3^x을 $t(t>0)$로 치환하면
$t^2-30t+81<0$, $(t-3)(t-27)<0$
$\therefore 3<t<27$
즉 $3^1<3^x<3^3$이고, 이때 (밑)$=3>1$이므로 $1<x<3$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 **1**이다.

기본강화 본문 98~99쪽

01 Action 지수함수의 성질을 이용한다.

지수함수 $y=2^x$은 치역이 양의 실수의 집합이고 일대일함수이므로

$a>0$이면 $2^x=a$를 만족시키는 x의 값은 유일하게 존재하고

$a\le 0$이면 $2^x=a$를 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $F_a\neq\varnothing$에서 $a>0$이고, 이때 집합 F_a의 원소에서 $2^x=a$를 만족시키는 x는 **1**개이다.

02 Action 구간 $x<-1$, $-1\le x<1$, $x\ge 1$로 나누어 생각한다.

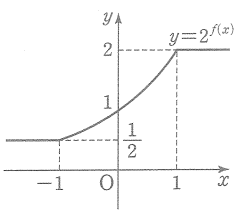
함수 $y=f(x)$의 식을 구하면

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (x<-1)\\ x & (-1\le x<1)\\ 1 & (x\ge 1)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=2^{f(x)}$의 식은 다음과 같다.

$$y=2^{f(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x<-1)\\ 2^x & (-1\le x<1)\\ 2 & (x\ge 1)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=2^{f(x)}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



03 Action 그래프 위에 있는 점의 좌표를 함수식에 대입하면 등식이 성립한다.

세 점 $(-x_1, a)$, (x_2, b), (x_1+x_2, c)가 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점이므로

$2^{-x_1}=a$, $2^{x_2}=b$, $2^{x_1+x_2}=c$

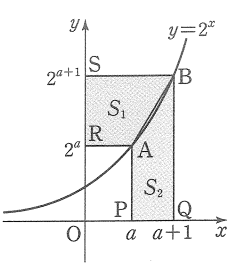
이때 $2^{x_1}=a^{-1}=\frac{1}{a}$, $2^{x_1+x_2}=2^{x_1}\times 2^{x_2}$이므로

$c=2^{x_1+x_2}=2^{x_1}\times 2^{x_2}=\frac{1}{a}\times b=\frac{b}{a}$

$\therefore b=ac$

04 Action 점 A의 x좌표를 a로 놓는다.

두 점 A, P의 x좌표는 같고, 두 점 B, Q의 x좌표도 같다. 이때 $\overline{PQ}=1$이므로 점 A의 x좌표를 a라 하면 점 B의 x좌표는 $a+1$이다. 또 □ABSR의 넓이는 오른쪽 그림에서 S_1의 넓이와 같고, □APQB의 넓이는 S_2의 넓이와 같다.



이때 영역 S_1, S_2는 사다리꼴이므로

$S_1=\frac{a+(a+1)}{2}\times(2^{a+1}-2^a)=\frac{2a+1}{2}\times 2^a$

$=(2a+1)\times 2^{a-1}$

$S_2=\frac{2^{a+1}+2^a}{2}\times\{(a+1)-a\}=\frac{3}{2}\times 2^a=3\times 2^{a-1}$

주어진 조건에서 $S_1=S_2$이므로

$(2a+1)\times 2^{a-1}=3\times 2^{a-1}$, $2a+1=3$ $\therefore a=1$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(1, 2)$, $(2, 4)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{5}$

다른 풀이

오른쪽 그림에서

△ACB=△ABD이므로

□APQC=□ADSR이다. 이때

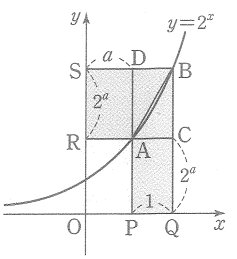
□APQC=$1\times 2^a=2^a$이고,

□ADSR=$a\times 2^a$이므로

$2^a=a\times 2^a$에서 $a=1$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(1, 2)$, $(2, 4)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{5}$

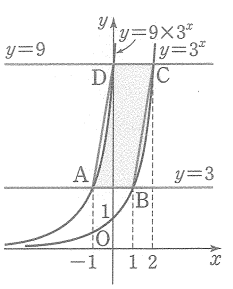


05 Action $y=9\times 3^x=3^{x+2}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 것이다.

$y=9\times 3^x=3^2\times 3^x=3^{x+2}$이므로 함수 $y=9\times 3^x$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 것이다.

이때 두 함수 $y=3^x$, $y=9\times 3^x$의 그래프와 두 직선 $y=3$, $y=9$로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이고, 이 부분의 넓이는 평행사변형 ABCD의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는

$2\times 6=$**12**



06 Action $f(a)f(b)=2^{a-3}\times 2^{b-3}$

점 C는 선분 AB의 중점이고, y축 위에 있으므로

$\frac{a+b}{2}=0$ $\therefore a+b=0$

이때 $f(x)=2^{x-3}$에서 $f(a)=2^{a-3}$, $f(b)=2^{b-3}$이므로

$f(a)f(b)=2^{a-3}\times 2^{b-3}=2^{a-3+b-3}$

$=2^{-6}=\frac{1}{64}$

07 Action 밑과 지수의 크기에 따른 대소 비교를 한다.

(i) $\frac{A}{B}=\frac{a^ab^bc^c}{a^bb^cc^b}=\frac{b^{b-c}}{c^{b-c}}=\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}$에서

밑이 $0<\frac{b}{c}<1$이고, 지수는 $b-c<0$이므로

$\frac{A}{B}>1 \quad \therefore B<A$

(ii) $\frac{B}{C}=\frac{a^ab^cc^b}{a^bb^cc^a}=\frac{a^{a-b}}{c^{a-b}}=\left(\frac{a}{c}\right)^{a-b}$에서

밑이 $0<\frac{a}{c}<1$이고, 지수는 $a-b<0$이므로

$\frac{B}{C}>1 \quad \therefore C<B$

(i), (ii)로부터 $C<B<A$

참고

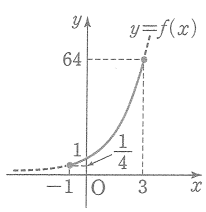
두 수 A, B가 모두 양수일 때만 $\frac{A}{B}$의 값이 1보다 큰지, 작은지를 조사하여 A, B의 대소를 비교할 수 있다.

수능 기출

08 Action 지수함수의 최대, 최소는 밑의 크기부터 확인한다.

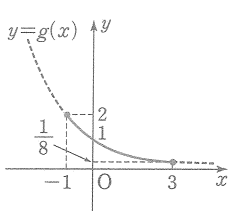
$f(x)=4^x$에서 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 함수이다. 이때 정의역이 $\{x|-1\le x\le 3\}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가진다.

$\therefore M=4^3=64$



$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 함수이다. 이때 정의역이 $\{x|-1\le x\le 3\}$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 최솟값을 가진다.

$\therefore m=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$



$\therefore Mm=64\times\frac{1}{8}=8$

LECTURE **지수함수 $y=a^x$의 최대 · 최소**

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\ne 1)$은 증가함수 또는 감소함수이고, 치역이 $\{y|y>0\}$이므로 최댓값, 최솟값이 존재하지 않는다. 그러나 제한된 정의역 $\{x|m\le x\le n\}$에서는

❶ $a>1$이면 $y=a^x$은 증가함수이므로
최댓값은 $x=n$일 때 a^n, 최솟값은 $x=m$일 때 a^m이다.

❷ $0<a<1$이면 $y=a^x$은 감소함수이므로
최댓값은 $x=m$일 때 a^m, 최솟값은 $x=n$일 때 a^n이다.

09 Action 밑이 1보다 크므로 지수가 최소일 때 최솟값을 가진다.

$y=2^{x^2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}=2^{x^2}\times 2^{-2x+3}=2^{x^2-2x+3}$에서

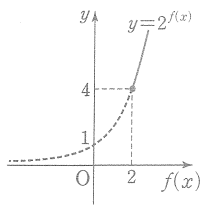
$f(x)=x^2-2x+3$이라고 하면

$f(x)=(x-1)^2+2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 최솟값은 $x=1$일 때 2이다.

$\therefore f(x)\ge 2$

이때 $y=2^{f(x)}$은 오른쪽 그림과 같이 증가하는 함수이므로 함수 $y=2^{f(x)}$의 최솟값은 $f(x)=2$일 때 4이다.



10 Action 2^{-x}을 t로 치환한다.

$y=2^{-2x}-2^{-x+1}+k=(2^{-x})^2-2\times 2^{-x}+k$에서

2^{-x}을 t $(t>0)$로 치환하면

$y=t^2-2t+k \quad \therefore y=(t-1)^2-1+k$

이때 $-1\le x\le 2$에서

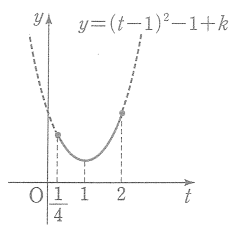
$-2\le -x\le 1,\ 2^{-2}\le 2^{-x}\le 2^1 \quad \therefore \frac{1}{4}\le t\le 2$

함수 $y=(t-1)^2-1+k$의 그래프의 개형이 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=(t-1)^2-1+k$의 최댓값은 $t=2$일 때

$y=(2-1)^2-1+k=k$

최솟값은 $t=1$일 때

$y=(1-1)^2-1+k=-1+k$



주어진 조건에서 최댓값과 최솟값의 합이 7이므로

$k-1+k=7$에서

$2k-1=7 \quad \therefore k=4$

평가원 기출

11 Action 지수방정식에서 밑이 같은 경우

⇨ $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ $(a>0,\ a\ne 1)\iff f(x)=g(x)$

$f(x)=2^{-x}$에 대하여

$f(2a)f(b)=4$이므로 $2^{-2a}\times 2^{-b}=2^2$, 즉 $2^{-2a-b}=2^2$에서

$-2a-b=2 \quad \therefore 2a+b=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $f(a-b)=2$이므로 $2^{-(a-b)}=2^1$에서

$-(a-b)=1 \quad \therefore a-b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡에서

$3a=-3 \quad \therefore a=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=0$

$\therefore 2^{3a}+2^{3b}=2^{-3}+2^0=\frac{1}{8}+1=\frac{9}{8}$

따라서 $p=8$, $q=9$이므로

$p+q=17$

평가원 기출

12 Action a^x을 $t(t>0)$로 치환한다.

$a^{2x}-a^x=2$에서 $(a^x)^2-a^x=2$

이때 a^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$t^2-t-2=0$, $(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

따라서 $a^x=2$이고, 이때의 x의 값이 $\frac{1}{7}$이므로

$a^{\frac{1}{7}}=2$, $(a^{\frac{1}{7}})^7=2^7$ $\therefore a=2^7=\mathbf{128}$

수능 기출

13 Action 2^x을 $t(t>0)$로 치환한다.

$4^x-7\times2^x+12=0$에서 $(2^x)^2-7\times2^x+12=0$

이때 2^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$t^2-7t+12=0$, $(t-3)(t-4)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=4$

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 2^x을 t로 치환한 방정식 $t^2-7t+12=0$의 두 근은 2^α, 2^β이다.

따라서 $2^\alpha=3$, $2^\beta=4$라고 하면

$2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(2^\alpha)^2+(2^\beta)^2$

$=3^2+4^2=9+16=\mathbf{25}$

14 Action 2^x을 $t(t>0)$로 치환하면 t에 대한 이차방정식은 양의 근을 가진다.

$4^x-a\times2^{x+1}+a^2-a-6=0$에서

$(2^x)^2-2a\times2^x+a^2-a-6=0$

이때 2^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$t^2-2at+a^2-a-6=0$ ····· ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 근을 가져야 한다.

(i) 방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a^2-a-6)>0$

$a+6>0$ $\therefore a>-6$

(ii) 방정식 ㉠의 두 근을 α, β라고 하면 두 근의 합이 양수이어야 한다. 이때 $\alpha+\beta=2a$이므로 $2a>0$에서 $a>0$

(iii) 방정식 ㉠의 두 근의 곱이 양수이어야 한다.

이때 $\alpha\beta=a^2-a-6$이므로 $a^2-a-6>0$에서

$(a+2)(a-3)>0$ $\therefore a<-2$ 또는 $a>3$

(i), (ii), (iii)으로부터 $\boldsymbol{a>3}$

참고

2^x을 t로 치환하면 $t>0$인 수이어야 하므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 치환한 방정식은 서로 다른 두 양수의 근을 가져야 한다.

15 Action $0<a<1$이면 $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)>g(x)$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}>\left(\frac{1}{3}\right)^{g(x)}$에서 $0<(\text{밑})=\frac{1}{3}<1$이므로

$f(x)<g(x)$ ····· ㉠

주어진 두 함수의 그래프에서 부등식 ㉠을 만족시키는 x값의 범위를 구하면 $1<x<3$이다.

이때 해가 $1<x<3$이고, 이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)<0$ $\therefore x^2-4x+3<0$

이 부등식이 $x^2+px+q<0$과 같으므로

$\boldsymbol{p=-4}$, $\boldsymbol{q=3}$

평가원 기출

16 Action 3^x을 $t(t>0)$로 놓고 t에 대한 부등식으로 변형하여 해를 구한다.

$9^x-3^{x+2}+18<0$에서 $(3^x)^2-9\times3^x+18<0$

이때 3^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$t^2-9t+18<0$, $(t-3)(t-6)<0$

$\therefore 3<t<6$

즉 $3<3^x<6$이다.

또 주어진 부등식의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로 $3^\alpha<3^x<3^\beta$

따라서 $3^\alpha=3$, $3^\beta=6$이므로

$3^\alpha\times3^\beta=3\times6=\mathbf{18}$

평가원 기출

17 Action 행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$에 대하여 $ad-bc\neq0$일 때

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

행렬 $A=\begin{pmatrix}3^{2x}+3 & -3^x\\ -4 & 1\end{pmatrix}$에서

$$A^{-1}=\frac{1}{3^{2x}+3-4\times3^x}\begin{pmatrix}1 & 3^x\\ 4 & 3^{2x}+3\end{pmatrix}$$

이때 $3^x>0$이므로 A^{-1}의 모든 성분이 음수가 되려면

$3^{2x}+3-4\times3^x<0$, 즉 $(3^x)^2-4\times3^x+3<0$이어야 한다.

이때 3^x을 $t(t>0)$로 치환하면

$t^2-4t+3<0$, $(t-1)(t-3)<0$

$\therefore 1<t<3$

따라서 $3^0<3^x<3^1$이고, 이때 $(\text{밑})=3>1$이므로

$\boldsymbol{0<x<1}$

참고

행렬 $A=\begin{pmatrix}3^{2x}+3 & -3^x\\ -4 & 1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 x의 값은 방정식 $3^{2x}+3-4\times3^x=0$의 근이므로

$x=0$ 또는 $x=1$

3. 로그

개념 강화 드릴 ①

본문 101 쪽

01 로그의 정의 ($a^x=b \iff x=\log_a b$)에 의하여

(1) $8^2=64$에서 $2=\log_8 64$

(2) $5^3=125$에서 $3=\log_5 125$

(3) $6^{-2}=\frac{1}{36}$에서 $-2=\log_6 \frac{1}{36}$

(4) $10^{-3}=0.001$에서 $-3=\log_{10} 0.001$

02 로그의 정의 ($\log_a b=x \iff a^x=b$)에 의하여

(1) $\log_3 27=3$에서 $3^3=27$

(2) $\log_8 4=\frac{2}{3}$에서 $8^{\frac{2}{3}}=4$

(3) $\log_7 \frac{1}{49}=-2$에서 $7^{-2}=\frac{1}{49}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 2=-1$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

03 (1) $x=\log_2 16$으로 놓으면 $2^x=16$

$2^x=16=2^4$이므로 $x=4$

$\therefore \log_2 16=4$

(2) $x=\log_3 243$으로 놓으면 $3^x=243$

$3^x=243=3^5$이므로 $x=5$

$\therefore \log_3 243=5$

(3) $x=\log_2 \sqrt{2}$로 놓으면 $2^x=\sqrt{2}$

$2^x=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$이므로 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore \log_2 \sqrt{2}=\frac{1}{2}$

(4) $x=\log_5 \frac{1}{125}$로 놓으면 $5^x=\frac{1}{125}$

$5^x=\frac{1}{125}=\left(\frac{1}{5}\right)^3=5^{-3}$이므로 $x=-3$

$\therefore \log_5 \frac{1}{125}=-3$

04 $\log_{x-1}(3-x)$에서

(i) 밑이 0보다 커야 하므로

$x-1>0$ $\therefore x>1$

(ii) 밑이 1이 아니어야 하므로

$x-1\neq 1$ $\therefore x\neq 2$

(iii) 진수가 0보다 커야 하므로

$3-x>0$ $\therefore x<3$

(i), (ii), (iii)으로부터 $1<x<2$ 또는 $2<x<3$

05 $\log_a x=p$, $\log_a y=q$로 놓으면 $x=a^p$, $y=a^q$

(1) 지수법칙으로부터 $xy=a^p\times a^q=a^{p+q}$

이때 등식의 양변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a xy=\log_a a^{p+q}=p+q=\log_a x+\log_a y$

(2) 지수법칙으로부터 $\frac{x}{y}=\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$

$\therefore \log_a \frac{x}{y}=\log_a a^{p-q}=p-q=\log_a x-\log_a y$

(3) 지수법칙으로부터 $xy=a^p\times a^q=a^{p+q}$

$\therefore \log_a x+\log_a y=p+q=\log_a a^{p+q}$

$=\log_a (a^p\cdot a^q)=\log_a xy$

(4) 지수법칙으로부터 $\frac{x}{y}=\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$

$\therefore \log_a x-\log_a y=p-q=\log_a a^{p-q}$

$=\log_a \frac{a^p}{a^q}=\log_a \frac{x}{y}$

따라서 (1) × (2) × (3) × (4) ×

06 ㄱ. $\log_3 18=\log_3(3^2\times 2)=2\log_3 3+\log_3 2$

$=2+\log_3 2$

ㄴ. $\log_2 \frac{8}{9}=\log_2 8-\log_2 9=\log_2 2^3-\log_2 3^2$

$=3\log_2 2-2\log_2 3=3-2\log_2 3$

ㄷ. $\log_3 \frac{3}{4}+\log_3 12=\log_3\left(\frac{3}{4}\times 12\right)=\log_3 9$

$=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$

ㄹ. $\log_5 4-\log_5 20=\log_5 \frac{4}{20}=\log_5 \frac{1}{5}$

$=\log_5 5^{-1}=-\log_5 5=-1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

07 (1) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\frac{\log_c b}{\log_c a}\cdot\frac{\log_c c}{\log_c b}\cdot\frac{\log_c a}{\log_c c}=1$

(2) $a^{3\log_{a^6} b^4}=a^{3\times\frac{4}{6}\log_a b}=a^{2\log_a b}=a^{\log_a b^2}=b^2$ ($\because a^{\log_a c}=c$)

쌤파 특강 확인 01

본문 102 쪽

(1) $\log_2(x+1)$이 정의되려면 (진수)>0에서

$x+1>0$ $\therefore x>-1$

(2) $\log_{x-1} 4$가 정의되려면 밑 조건에서

$x-1>0$, $x-1\neq 1$ $\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$

(3) $\log_2(x-1)^2$이 정의되려면 (진수)>0에서

$(x-1)^2>0$ $\therefore x\neq 1$

(4) $\log_x(x-5)$가 정의되려면 밑 조건에서

$x>0$, $x\neq 1$ $\therefore 0<x<1$ 또는 $x>1$ ····· ㉠

(진수)>0에서 $x-5>0$ $\therefore x>5$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>5$

확인 문제 본문 103~111쪽

1-1 Action $\log_a b$가 정의되기 위한 조건은 $a>0$, $a\neq1$, $b>0$이다.

(1) $\log_3(x^2-3x-10)$이 정의되려면 (진수)>0에서

$x^2-3x-10>0$, $(x+2)(x-5)>0$

$\therefore$ $x<-2$ 또는 $x>5$

(2) $\log_{x-3}(-x^2+9x-18)$이 정의되려면

밑 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq1$, 즉 $x>3$, $x\neq4$이므로

$\therefore$ $3<x<4$ 또는 $x>4$ ····· ㉠

(진수)>0에서 $-x^2+9x-18>0$이므로

$x^2-9x+18<0$, $(x-3)(x-6)<0$

$\therefore$ $3<x<6$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<4$ 또는 $4<x<6$

1-2 Action 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+b>0$이려면 $x^2+ax+b=0$의 판별식 $D<0$이어야 한다.

$\log_2(x^2-2kx+5)$가 정의되려면 진수 조건에 의해 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx+5>0$이어야 한다.

이때 이차방정식 $x^2-2kx+5=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-5<0$, $k^2-5<0$

$(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})<0$ $\therefore$ $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ ($\sqrt{5}\fallingdotseq2.236$)

따라서 이 식을 만족시키는 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2로 **5**개이다.

개념 다시보기 이차부등식이 항상 성립할 조건

모든 실수 x에 대하여

❶ 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면

⇨ $a>0$, $b^2-4ac<0$

❷ 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 성립하려면

⇨ $a<0$, $b^2-4ac<0$

2-1 Action 로그의 기본 성질을 이용한다. 즉

$\log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}$

$k\log_a M=\log_a M^k$ (단, k는 실수)

(1) $\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\log_2 3=\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}-\log_2 3^{\frac{1}{2}}$

$=\log_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\div\sqrt{3}\right)$

$=\log_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

(2) $\log_3\frac{9}{5}+2\log_3\sqrt{5}-\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{9}$

$=\log_3\frac{9}{5}+\log_3(\sqrt{5})^2-\log_3\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ ($\log_3\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\log_3\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\log_3\frac{1}{3}$)

$=\log_3\left(\frac{9}{5}\times5\div\frac{1}{3}\right)=\log_3\left(\frac{9}{5}\times5\times3\right)$

$=\log_3 3^3=3\log_3 3=3$

2-2 Action 로그의 덧셈은 밑이 같은 것끼리 먼저 계산한다.

$abc=1$이므로 $bc=\frac{1}{a}$, $ac=\frac{1}{b}$, $ab=\frac{1}{c}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=(\log_a b+\log_a c)+(\log_b a+\log_b c)+(\log_c a+\log_c b)$

$=\log_a bc+\log_b ac+\log_c ab$

$=\log_a\frac{1}{a}+\log_b\frac{1}{b}+\log_c\frac{1}{c}$

$=\log_a a^{-1}+\log_b b^{-1}+\log_c c^{-1}$

$=-1+(-1)+(-1)=-3$

3-1 Action 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 10으로 고친다.

(1) $\log_{\sqrt{2}}3\cdot\log_9 5\cdot\log_{\sqrt{5}}8$

$=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}\sqrt{2}}\cdot\frac{\log_{10}5}{\log_{10}9}\cdot\frac{\log_{10}8}{\log_{10}\sqrt{5}}$

$=\frac{\log_{10}3}{\frac{1}{2}\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}5}{2\log_{10}3}\cdot\frac{3\log_{10}2}{\frac{1}{2}\log_{10}5}$

$=2\times\frac{1}{2}\times6=6$

(2) $(\log_7 16\cdot\log_3 7-\log_3 2)\cdot\log_2 3$

$=\left(\frac{\log_{10}16}{\log_{10}7}\cdot\frac{\log_{10}7}{\log_{10}3}-\frac{\log_{10}2}{\log_{10}3}\right)\cdot\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}$

$=\left(\frac{4\log_{10}2}{\log_{10}3}-\frac{\log_{10}2}{\log_{10}3}\right)\cdot\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}$

$=\frac{3\log_{10}2}{\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}=3\times1=3$

LECTURE 밑이 다른 로그의 계산

로그의 밑이 다른 경우 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 같게 할 때 밑의 값은 1이 아닌 양수이면 된다. 예를 들어 (1)에서 밑이 2인 로그로 변환하여 풀면

$\log_{\sqrt{2}}3\cdot\log_9 5\cdot\log_{\sqrt{5}}8=\frac{\log_2 3}{\frac{1}{2}\log_2 2}\cdot\frac{\log_2 5}{2\log_2 3}\cdot\frac{3\log_2 2}{\frac{1}{2}\log_2 5}$

$=2\times\frac{1}{2}\times6=6$

으로 위의 결과와 같다.

수능 기출

3-2 Action 로그의 성질을 이용하여 주어진 비례식을 a, b에 대한 식으로 변형한다.

$\log_a c : \log_b c = 2 : 1$에서 $2\log_b c = \log_a c$

즉 $\dfrac{2}{\log_c b} = \dfrac{1}{\log_c a}$이므로

$2\log_c a = \log_c b \quad \therefore \log_c a^2 = \log_c b$

따라서 $b = a^2$이므로

$\log_a b + \log_b a = \log_a a^2 + \log_{a^2} a$

$= 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

다른 풀이

$2\log_c a = \log_c b$에서 $\dfrac{\log_c b}{\log_c a} = 2$, 즉 $\log_a b = 2$이므로

$\log_a b + \log_b a = \log_a b + \dfrac{1}{\log_a b} = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

4-1 Action 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 밑이 3인 로그로 변환한다.

$a = \log_2 3$에서 $\log_3 2 = \dfrac{1}{a}$이고, $\log_3 5 = b$이므로 밑의 변환 공식을 이용하여 $\log_{120} 150$을 밑이 3인 로그로 변환하면

$\log_{120} 150 = \dfrac{\log_3 150}{\log_3 120} = \dfrac{\log_3 (2\times 3\times 5^2)}{\log_3 (2^3\times 3\times 5)}$

$= \dfrac{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 5^2}{\log_3 2^3 + \log_3 3 + \log_3 5}$

$= \dfrac{\frac{1}{a} + 1 + 2b}{\frac{3}{a} + 1 + b} = \dfrac{1 + a + 2ab}{3 + a + ab}$

4-2 Action 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 밑이 2인 로그로 변환한다.

$2^a = 3$에서 $a = \log_2 3$, $2^b = 5$에서 $b = \log_2 5$이고 밑의 변환 공식을 이용하여 $\log_{200} 270$을 밑이 2인 로그로 변환하면

$\log_{200} 270 = \dfrac{\log_2 270}{\log_2 200} = \dfrac{\log_2 (2\times 3^3\times 5)}{\log_2 (2^3\times 5^2)}$

$= \dfrac{\log_2 2 + \log_2 3^3 + \log_2 5}{\log_2 2^3 + \log_2 5^2}$

$= \dfrac{1 + 3\log_2 3 + \log_2 5}{3 + 2\log_2 5}$

$= \dfrac{1 + 3a + b}{3 + 2b}$

셀파 특강 **확인 02** 본문 108 쪽

(1) $2^{\log_2 3} = 3^{\log_2 2} = 3$

(2) $3^{\log_3 5} = 5^{\log_3 3} = 5$

(3) $4^{\log_2 3} = 3^{\log_2 4} = 3^{\log_2 2^2} = 3^2 = 9$

(4) $3^{\log_9 25} = 25^{\log_9 3} = 25^{\log_{3^2} 3} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5$

5-1 Action 지수 부분을 먼저 정리한다.

(1) 먼저 지수 부분을 정리하면

$3\log_5 2 - 2\log_5 \sqrt{5} + \log_5 4 = \log_5 2^3 - \log_5 (\sqrt{5})^2 + \log_5 4$

$= \log_5 8 - \log_5 5 + \log_5 4$

$= \log_5 \left(8\times\dfrac{1}{5}\times 4\right) = \log_5 \dfrac{32}{5}$

$\therefore 5^{3\log_5 2 - 2\log_5\sqrt{5} + \log_5 4} = 5^{\log_5 \frac{32}{5}} = \dfrac{32}{5}$

(2) 먼저 지수 부분을 정리하면

$\log_2 9\cdot\log_5 0.2\cdot\log_9 4 = \dfrac{\log_{10} 9}{\log_{10} 2}\cdot\dfrac{\log_{10}\frac{1}{5}}{\log_{10} 5}\cdot\dfrac{\log_{10} 4}{\log_{10} 9}$

$= \dfrac{\log_{10} 9}{\log_{10} 2}\cdot\dfrac{-\log_{10} 5}{\log_{10} 5}\cdot\dfrac{2\log_{10} 2}{\log_{10} 9}$

$= -2$

$\therefore 3^{\log_2 9\cdot\log_5 0.2\cdot\log_9 4} = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$

5-2 Action $\log_2 5$의 정수 부분을 먼저 구하고 (소수 부분)$=\log_2 5 -$(정수 부분)을 이용한다.

$\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$에서 $2 < \log_2 5 < 3$이므로

$\log_2 5 = 2.\times\times\times\times \quad \therefore a = 2$

이때 $b = \log_2 5 - 2 = \log_2 5 - \log_2 4 = \log_2 \dfrac{5}{4}$이므로

$a + 2^b = 2 + 2^{\log_2 \frac{5}{4}} = 2 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{13}{4}$

셀파 비법 **확인 03** 본문 110 쪽

(1) $a^5 = b^3$의 양변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a a^5 = \log_a b^3$에서 $5 = 3\log_a b$

따라서 $\log_a b = \dfrac{5}{3}$이므로

$\log_a \sqrt{ab^2} = \log_a (ab^2)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(\log_a a + \log_a b^2)$

$= \dfrac{1}{2}(1 + 2\log_a b) = \dfrac{1}{2}\left(1 + 2\times\dfrac{5}{3}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\times\dfrac{13}{3} = \dfrac{13}{6}$

(2) $\log_{a^2} 16=\log_b 64$에서 양변을 밑이 2인 로그로 변환하면

$\log_{a^2} 16=\dfrac{\log_2 16}{\log_2 a^2}=\dfrac{4}{2\log_2 a}=\dfrac{2}{\log_2 a}$,

$\log_b 64=\dfrac{\log_2 64}{\log_2 b}=\dfrac{6}{\log_2 b}$이므로

$\dfrac{2}{\log_2 a}=\dfrac{6}{\log_2 b}$, $2\log_2 b=6\log_2 a$ $\therefore \log_2 b=3\log_2 a$

즉 $\log_2 b=\log_2 a^3$이므로 $b=a^3$

$\therefore \log_{ab} b^2=\log_{a\times a^3}(a^3)^2=\log_{a^4} a^6=\dfrac{6}{4}\log_a a=\dfrac{3}{2}$

(3) $\log_a x=2$에서 $\dfrac{1}{\log_x a}=2$ $\therefore \log_x a=\dfrac{1}{2}$

$\log_b x=3$에서 $\dfrac{1}{\log_x b}=3$ $\therefore \log_x b=\dfrac{1}{3}$

$\log_c x=5$에서 $\dfrac{1}{\log_x c}=5$ $\therefore \log_x c=\dfrac{1}{5}$

$\therefore \log_{abc} x=\dfrac{1}{\log_x abc}=\dfrac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c}$

$=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=\dfrac{30}{31}$

06-1 Action 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha\beta$의 값을 구한다.

$x^2-5x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터

$\alpha\beta=2$

$\therefore \log_2\dfrac{1}{\alpha}+\log_2\dfrac{1}{\beta}=\log_2\dfrac{1}{\alpha\beta}=\log_2\dfrac{1}{2}$

$=\log_2 2^{-1}=-1$

06-2 Action 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

$x^2-7x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터

$\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \log_{\alpha\beta}\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}+1\right)+\log_{\alpha\beta}\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}+1\right)$

$=\log_{\alpha\beta}\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}+1\right)\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}+1\right)$

$=\log_{\alpha\beta}\left(\alpha\beta+1+\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta}+\beta+\dfrac{1}{\alpha}+1\right)$

$=\log_{\alpha\beta}\left(\alpha\beta+\dfrac{1}{\alpha\beta}+\alpha+\beta+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+3\right)$

$=\log_2\left(2+\dfrac{1}{2}+7+\dfrac{7}{2}+3\right)$ → $\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=2$를 대입!

$=\log_2 16=\log_2 2^4=4$

개념 강화 드릴 ②

본문 113쪽

01 (1) $\log 1000=\log 10^3=3\log 10=3$

(2) $\log 0.001=\log 10^{-3}=-3\log 10=-3$

(3) $\log\sqrt[3]{10}=\log 10^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}\log 10=\dfrac{1}{3}$

(4) $\log\sqrt[5]{1000}=\log 1000^{\frac{1}{5}}=\log(10^3)^{\frac{1}{5}}$

$=\log 10^{\frac{3}{5}}=\dfrac{3}{5}\log 10=\dfrac{3}{5}$

(5) $\log\dfrac{1}{100}=\log 10^{-2}=-2\log 10=-2$

(6) $\log\sqrt{\dfrac{1}{100}}=\log\left(\dfrac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}=\log(10^{-2})^{\frac{1}{2}}$

$=\log 10^{-1}=-\log 10=-1$

02 (1) $\log 4=\log 2^2=2\log 2$

$=2\times 0.3010=\mathbf{0.6020}$

(2) $\log 5=\log\dfrac{10}{2}=\log 10-\log 2$

$=1-0.3010=\mathbf{0.6990}$

(3) $\log 6=\log(2\times 3)=\log 2+\log 3$

$=0.3010+0.4771=\mathbf{0.7781}$

(4) $\log 9=\log 3^2=2\log 3$

$=2\times 0.4771=\mathbf{0.9542}$

03 (1) $\log 72=\log(2^3\times 3^2)=\log 2^3+\log 3^2$

$=3\log 2+\mathbf{2}\log 3=3\times 0.3010+2\times 0.4771$

$=\mathbf{0.9030}+0.9542=1.8572$

(2) $\log 864=\log(2^5\times 3^3)=\log 2^5+\log 3^3$

$=5\log 2+\mathbf{3}\log 3=5\times 0.3010+3\times 0.4771$

$=1.5050+\mathbf{1.4313}=\mathbf{2.9363}$

04 (1) $\log A=2.3570=2+0.3570$이므로

지표는 **2**, 가수는 **0.3570**이다.

(2) $\log B=0.4832$이므로

지표는 **0**, 가수는 **0.4832**이다.

(3) $\log C=\bar{3}.5498=-3+0.5498$이므로

지표는 **−3**, 가수는 **0.5498**이다.

(4) $\log D=-1.6492=-1-0.6492$

$=(-1-1)+(1-0.6492)$

$=-2+0.3508$

이므로 지표는 **−2**, 가수는 **0.3508**이다.

오답 피하기

(4)의 $-1.6492=-1-0.6492$에서 소수 부분은 -0.6492인데 $0\le$(가수)<1이어야 하므로 상용로그 값의 정수 부분에서 1을 빼고 소수 부분에 1을 더하여 소수 부분을 양수로 만들어 주어야 그 값이 가수이다. 즉

$$\begin{aligned}-1.6492&=-1-0.6492=(-1-1)+(1-0.6492)\\&=-2+0.3508\end{aligned}$$

에서 $\log D$의 지표는 -2, 가수는 0.3508이다.

$\log D=-1.6492$의 지표와 가수를 구할 때, 지표는 -1, 가수는 0.6492라고 답하지 않도록 주의한다.

05 $\log 3.54=0.5490$, $\log 6.52=0.8142$이므로

(1) $\log 0.0354=\log(3.54\times10^{-2})$
$=\log 3.54+\log 10^{-2}$
$=-2+0.5490=\bar{2}.5490$

(2) $\log 3540=\log(3.54\times10^{3})$
$=\log 3.54+\log 10^{3}$
$=3+0.5490=\mathbf{3.5490}$

(3) $\log 65.2=\log(6.52\times10)$
$=\log 6.52+\log 10$
$=1+0.8142=\mathbf{1.8142}$

(4) $\log 65200=\log(6.52\times10^{4})$
$=\log 6.52+\log 10^{4}$
$=4+0.8142=\mathbf{4.8142}$

06 $\log 2.54=0.4048$, $\log 9.87=0.9943$이므로

(1) $\log x=3.4048$에서 지표는 3이므로 x는 정수 부분이 4자리인 수이고 $\log 2.54$와 가수가 같으므로 $x=\mathbf{2540}$이다.

(2) $\log x=\bar{2}.4048$에서 지표는 -2이므로 x는 소수점 아래 둘째 자리부터 0이 아닌 숫자가 나타나는 수이고 $\log 2.54$와 가수가 같으므로 $x=\mathbf{0.0254}$이다.

(3) $\log x=4.9943$에서 지표는 4이므로 x는 정수 부분이 5자리인 수이고 $\log 9.87$과 가수가 같으므로 $x=\mathbf{98700}$이다.

(4) $\log x=\bar{3}.9943$에서 지표는 -3이므로 x는 소수점 아래 셋째 자리부터 0이 아닌 숫자가 나타나는 수이고 $\log 9.87$과 가수가 같으므로 $x=\mathbf{0.00987}$이다.

07 200은 3자리 정수이므로 $\log 200$의 지표 $n=\mathbf{2}$이고 가수는

$\alpha=\log 200-n=\log 200-2$

$=\log 200-\log\mathbf{100}=\log\dfrac{200}{100}=\log 2$

$\therefore 10^{\alpha}=10^{\log 2}=2$

($a^{\log_a b}=b$)

셀파 특강 확인 04 본문 114쪽

(1) $\log 3.14=0.4969$ $\therefore a=\mathbf{0.4969}$

(2) $\log 8.15=0.9112$ $\therefore b=\mathbf{0.9112}$

(3) $\log 2.57=0.4099$ $\therefore c=\mathbf{2.57}$

(4) $\log 5.78=0.7619$ $\therefore d=\mathbf{5.78}$

LECTURE $\log 1.235$의 값은 어떻게 구할까?

상용로그표에 있는 대부분의 로그 값은 무리수이므로 소수로 나타내면 무한소수이다. 따라서 소수점 아래 셋째 자리 이하의 값을 구하려면 상용로그의 값이 근삿값이란 것을 알고 상용로그표에 나와 있는 값과 비례 원리를 이용하여 구하면 된다. 즉 $\log 1.235$의 값은 $\log 1.23$의 값과 $\log 1.24$의 값을 1 : 1로 나누는 값으로 생각할 수 있다.

이때 $\log 1.23=0.0899$, $\log 1.24=0.0934$이고, $\log 1.235$의 값은 $\log 1.23$의 값과 $\log 1.24$의 값을 1 : 1로 나눈 값이므로 내분점의 공식을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\log 1.235=\frac{\log 1.23+\log 1.24}{1+1}$$

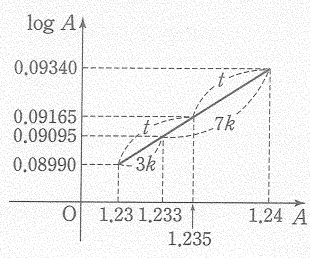
$$=\frac{0.0899+0.0934}{2}=0.09165$$

마찬가지로 생각하면 $\log 1.233$의 값은 $\log 1.23$의 값과 $\log 1.24$의 값을 3 : 7로 나눈 값으로 구할 수 있다. 즉

$$\log 1.233=\frac{7\times\log 1.23+3\times\log 1.24}{3+7}$$

$$=\frac{7\times0.0899+3\times0.0934}{10}=0.09095$$

다음 그림은 $\log 1.235$의 값과 $\log 1.233$의 값을 나타낸 것이다.



개념 다시보기 좌표평면 위의 선분의 내분점, 중점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q, 선분 AB의 중점을 M이라고 하면

❶ 내분점 : $P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

❷ 중점 : $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

❸ 외분점 : $Q\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)

확인 문제 본문 115~121 쪽

07-1 Action 구하는 로그의 진수를 2, 3 또는 7을 포함하는 꼴로 고친다.

(1) $\log 252=\log(2^2\times3^2\times7)$
$=\log 2^2+\log 3^2+\log 7$
$=2\log 2+2\log 3+\log 7$
$=2\times0.3010+2\times0.4771+0.8451$
$=0.6020+0.9542+0.8451$
$=\mathbf{2.4013}$

(2) $\log\frac{1}{0.36}=\log 0.6^{-2}=-2\log\frac{6}{10}$
$=-2(\log 6-\log 10)$
$=-2(\log 2+\log 3-1)$
$=-2(0.3010+0.4771-1)$
$=-2\times(-0.2219)$
$=\mathbf{0.4438}$

(3) $\log(\tan 30^\circ)=\log\frac{\sqrt{3}}{3}=\log 3^{\frac{1}{2}}-\log 3$
$=\frac{1}{2}\log 3-\log 3$
$=-\frac{1}{2}\log 3=-\frac{1}{2}\times0.4771$
$=\mathbf{-0.23855}$

(4) $\log\sqrt[3]{5.88}=\log 5.88^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log 5.88$
$=\frac{1}{3}\log\frac{588}{100}$
$=\frac{1}{3}(\log 588-\log 100)$
$=\frac{1}{3}\{\log(2^2\times3\times7^2)-\log 10^2\}$
$=\frac{1}{3}(2\log 2+\log 3+2\log 7-2\log 10)$
$=\frac{1}{3}(2\times0.3010+0.4771+2\times0.8451-2)$
$=\frac{1}{3}(0.6020+0.4771+1.6902-2)$
$=\frac{1}{3}\times0.7693\fallingdotseq\mathbf{0.2564}$

(5) $\log_2 147=\frac{\log 147}{\log 2}=\frac{\log(3\times7^2)}{\log 2}$
$=\frac{\log 3+2\log 7}{\log 2}$
$=\frac{0.4771+2\times0.8451}{0.3010}$
$=\frac{2.1673}{0.3010}\fallingdotseq\mathbf{7.2003}$

07-2 Action 구하는 값을 x로 놓고 양변에 상용로그를 취한다.

(1) $x=1.17^9$으로 놓고 양변에 상용로그를 취하면
$\log x=\log 1.17^9=9\log 1.17$
상용로그표에서 $\log 1.17=0.0682$이므로
$\log x=9\times0.0682=0.6138$
이때 상용로그표에서 $\log 4.11=0.6138$이므로 $x=4.11$
$\therefore 1.17^9=\mathbf{4.11}$

(2) $x=\sqrt[6]{6.05}$로 놓고 양변에 상용로그를 취하면
$\log x=\log\sqrt[6]{6.05}=\log 6.05^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\log 6.05$
상용로그표에서 $\log 6.05=0.7818$이므로
$\log x=\frac{1}{6}\times0.7818=0.1303$
이때 상용로그표에서 $\log 1.35=0.1303$이므로 $x=1.35$
$\therefore \sqrt[6]{6.05}=\mathbf{1.35}$

08-1 Action $\log A^3=3\log A$임을 이용하여 상용로그 값의 정수 부분과 소수 부분을 구한다.

$\log A=\bar{3}.5230=-3+0.5230$에서
$\log A^3=3\log A=3(-3+0.5230)$
$=-9+1.5690=-8+0.5690$
따라서 $\log A^3$의 지표는 -8, 가수는 **0.5690**

LECTURE 과학적 표기법과 지표와 가수

어떤 수 N을 $N=a\times10^n$ ($1\le a<10$, n은 정수)으로 나타내는 것을 '과학적 표기법(Scientific Notation)'이라고 한다. 상용로그에서 매우 중요하게 다루는 지표(指標)와 가수(假數)는 이 과학적 표기법과 관련이 있다. 일단 지표는 10을 몇 제곱하였는지 나타내는 n과 같고, 가수는 $\log a$의 값과 같다는 내용은 본문에서도 언급하였으므로 예를 통해 지표와 가수의 뜻을 알아보자.

N	$a\times10^n$	지표	가수
7650	7.65×10^3	3	log 7.65

상용로그표에서 $\log 7.65=0.8837$이므로 위 표의 내용을
$\log N=$(지표)+(가수) 꼴로 나타내면
$\log 7650=3+0.8837$
또 76.5와 76500을 $\log N=$(지표)+(가수) 꼴로 각각 나타내면
$76.5=7.65\times10^1$ ⇨ $\log 76.5=1+0.8837$
$76500=7.65\times10^4$ ⇨ $\log 76500=4+0.8837$
이때 지표가 어떤 역할을 하는지 알아보자.
지표 3 ⇨ $N=a\times10^3$ ⇨ 정수 부분이 4자리인 수
지표 1 ⇨ $N=b\times10^1$ ⇨ 정수 부분이 2자리인 수
지표 4 ⇨ $N=c\times10^4$ ⇨ 정수 부분이 5자리인 수
위에서 색으로 표시한 부분을 없다고 생각하면 지표는 결국 정수 부분의 자릿수를 나타낸다. 즉
(지표의 값)+1=(정수 부분의 자릿수)이다.

이번에는 가수가 어떤 역할을 하는지 알아보자.
76.5, 7650, 76500의 숫자 배열은 7, 6, 5로 같고, 이 숫자 배열의 가수는 0.8837로 모두 같다. 즉 가수 0.8837은 원래 수의 숫자 배열을 나타내고, 상용로그표에서 $0.8837=\log 7.65$이므로 가수가 0.8837인 수의 숫자 배열이 7, 6, 5인 것을 알려 준다. 따라서 가수가 같으면 숫자 배열이 같다.

8-2 Action 두 상용로그 $\log A$, $\log B$의 가수가 같으면 A, B의 숫자 배열이 같다.

(1) $\log x=2.5119$와 $\log 3250=3.5119$에서 진수 x의 숫자 배열은 진수 3250의 숫자 배열, 즉 3, 2, 5와 같고, 지표가 2이므로 정수 부분이 3자리인 수이다.
$\therefore x=\mathbf{325}$

(2) $-1.4881=-1-0.4881=(-1-1)+(1-0.4881)$
$=-2+0.5119=\bar{2}.5119$
$\log y=\log \bar{2}.5119$와 $\log 3250=3.5119$에서 진수 y의 숫자 배열은 진수 3250의 숫자 배열, 즉 3, 2, 5와 같고, 지표가 -2이므로 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
$\therefore y=\mathbf{0.0325}$

다른 풀이
$\log 3250=3.5119$에서 $\log 3.25=0.5119$이므로
(1) $2.5119=2+0.5119=\log 10^2+\log 3.25$
$=\log(3.25\times 10^2)=\log 325$
$\therefore x=325$
(2) $-1.4881=-2+0.5119=\log 10^{-2}+\log 3.25$
$=\log(3.25\times 10^{-2})=\log 0.0325$
$\therefore y=0.0325$

9-1 Action $\log 3^{22}$의 지표를 구하여 그 성질을 이용한다.
$\log 3^{22}=22\log 3=22\times 0.4771=10.4962$
즉 $\log 3^{22}$의 지표가 10이므로 3^{22}은 **11**자리 정수이다.
또 $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$에서 3^n($n=1, 2, 3, \cdots$)의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복되어 나타난다.
이때 $n=22=4\times 5+2$이므로 3^{22}의 일의 자리의 수는 **9**이다.

LECTURE 거듭제곱 수의 일의 자리 숫자
자연수를 거듭제곱한 수의 일의 자리의 숫자는 일의 자리의 숫자만 거듭제곱하여 순환주기를 찾으면 된다.
예 327^{327}의 일의 자리의 숫자를 구해 보자.
327의 일의 자리의 숫자는 7이고, $7^1=7$, $7^2=\cdots 9$,
$7^3=\cdots 3$, $7^4=\cdots 1$이므로 7의 거듭제곱의 일의 자리 숫자는
7^{4n+1} ⇨ 7, 7^{4n+2} ⇨ 9, 7^{4n+3} ⇨ 3, 7^{4n+4} ⇨ 1
(단, $n=0, 1, 2, \cdots$)
이때 $327^{327}=327^{4\times 81+3}$에서 327^{327}의 일의 자리 숫자는 3

9-2 Action a^{10}이 25자리 수이므로 $\log a^{10}=24.\times\times\times\times$이다.
a^{10}이 25자리 수이므로 $\log a^{10}$의 지표는 24이다. 즉
$\log a^{10}=24.\times\times\times\times$이므로
$24\le\log a^{10}<25$, $24\le 10\log a<25$
$\therefore 2.4\le\log a<2.5$
또 $\log\frac{1}{a}=-\log a$이므로 위 식의 각 변에 -1을 곱하면 (부등호의 방향이 반대로 바뀐다.)
$-2.5<-\log a\le -2.4$
$-3+0.5<-\log a\le -3+0.6$
$\therefore \bar{3}.5<-\log a\le\bar{3}.6$
따라서 $\log\frac{1}{a}$의 지표가 -3이므로 $\frac{1}{a}$은 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

실력 특강 확인 05 본문 118쪽

(1) $\log 3^{30}=30\log 3=30\times 0.4771=14.313$
즉 $\log 3^{30}$의 가수는 0.313이다.
이때 $\log x=0.313$이라고 하면 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$
이므로 $\log 2<\log x<\log 3$
$\therefore 2<x<3$
따라서 3^{30}의 최고 자리의 숫자는 **2**

(2) $\log 5^{11}=11\log 5=11\log\frac{10}{2}$
$=11(\log 10-\log 2)=11(1-0.3010)$
$=11\times 0.6990=7.6890$
$\log(100\times 5^{11})=\log 100+\log 5^{11}$
$=2+7.6890=9.6890$
즉 $\log(100\times 5^{11})$의 가수는 0.6890이다.
이때 $\log x=0.6890$이라고 하면 $\log 4=0.6020$, $\log 5=0.6990$
이므로 $\log 4<\log x<\log 5$
$\therefore 4<x<5$
따라서 100×5^{11}의 최고 자리의 숫자는 **4**

(3) $\log\left(\frac{9}{2}\right)^{10}=10\log\frac{9}{2}=10(\log 9-\log 2)$
$=10(2\log 3-\log 2)$
$=10(2\times 0.4771-0.3010)$
$=10\times 0.6532=6.532$
즉 $\log\left(\frac{9}{2}\right)^{10}$의 가수는 0.532이다.
이때 $\log x=0.532$라고 하면 $\log 3=0.4771$, $\log 4=0.6020$이므로 $\log 3<\log x<\log 4$
$\therefore 3<x<4$
따라서 $\left(\frac{9}{2}\right)^{10}$의 최고 자리의 숫자는 **3**

(4) $\log\left(\frac{8}{3}\right)^{10}=10(\log 8-\log 3)$
$=10(3\log 2-\log 3)$
$=10(3\times 0.3010-0.4771)$
$=10\times 0.4259=4.259$

즉 $\log\left(\frac{8}{3}\right)^{10}$의 가수는 0.259이다.

이때 $\log x=0.259$라고 하면 $\log 1=0$, $\log 2=0.3010$이므로
$\log 1<\log x<\log 2$
$\therefore 1<x<2$

따라서 $\left(\frac{8}{3}\right)^{10}$의 최고 자리의 숫자는 **1**

10-1 Action $\log x$와 $\log x^3$의 가수가 같으므로 $\log x^3-\log x=$(정수)

$100<x<1000$에서 $\log 100<\log x<\log 1000$
$\therefore 2<\log x<3$ ····· ㉠
이때 $\log x$의 가수와 $\log x^3$의 가수가 같으므로
$\log x^3-\log x=3\log x-\log x=2\log x=$(정수)
㉠에서 $4<2\log x<6$이고, $2\log x$는 정수이므로
$2\log x=5$, $\log x=\frac{5}{2}$
$\therefore x=\mathbf{10^{\frac{5}{2}}}$

10-2 Action $\log A$의 지표가 n이면 $n\le\log A<n+1$이다.

$\log x$의 지표가 3이므로
$3\le\log x<4$ ····· ㉠
이때 $\log x$의 가수와 $\log\sqrt{x}$의 가수의 합이 1이므로
$\log x+\log\sqrt{x}=\log x+\frac{1}{2}\log x$
$=\frac{3}{2}\log x=$(정수)
㉠에서 $\frac{9}{2}\le\frac{3}{2}\log x<6$이고, $\frac{3}{2}\log x$는 정수이므로
$\frac{3}{2}\log x=5$, $\log x=\frac{10}{3}$
$\therefore x=\mathbf{10^{\frac{10}{3}}}$

셀파 특강 **확인 06** 본문 120 쪽

n이 1000보다 작은 자연수이므로 $1\le n<1000$에서
$\log 1\le\log n<\log 10^3$ $\therefore 0\le\log n<3$
$\therefore [\log n]=0, 1, 2$

이때 $[\log 3n]=[\log n]$에서
(i) $[\log 3n]=[\log n]=0$일 때
$1\le 3n<10$, $1\le n<10$이므로 $1\le n<\frac{10}{3}$
$\therefore 1\le n\le 3$
(ii) $[\log 3n]=[\log n]=1$일 때
$10\le 3n<100$, $10\le n<100$이므로 $10\le n<\frac{100}{3}$
$\therefore 10\le n\le 33$
(iii) $[\log 3n]=[\log n]=2$일 때
$100\le 3n<1000$, $100\le n<1000$이므로 $100\le n<\frac{1000}{3}$
$\therefore 100\le n\le 333$
(i), (ii), (iii)으로부터 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는
$3+24+234=\mathbf{261}$(개)

11-1 Action 주어진 식 $\log N=a-0.9M$에서 $N=64$, $M=4$를 대입한다.

규모 4 이상인 지진이 1년에 평균 64번 발생하므로
$\log 64=a-0.9\times 4$, $6\log 2=a-3.6$
$\log 2=0.3$으로 계산하면 $1.8=a-3.6$ $\therefore a=5.4$
따라서 $\log N=5.4-0.9M$이다.
이때 규모 x 이상인 지진은 평균 1년에 한 번 발생하므로
$\log 1=5.4-0.9\times x$, $0.9x=5.4$
$\therefore x=\mathbf{6}$

11-2 Action 기준이 되는 한계 등급을 L_0라 하고, 이때의 망원경의 렌즈의 지름을 D_0라고 한다.

기준이 되는 한계 등급이 L_0일 때의 망원경의 렌즈의 지름을 D_0라고 하면
$L_0=2.24+4\log D_0$ ····· ㉠
또 한계 등급이 L_0+2일 때의 망원경의 렌즈의 지름을 D_2라고 하면
$L_0+2=2.24+4\log D_2$ ····· ㉡
㉡−㉠에서 $2=4(\log D_2-\log D_0)$, $\log\frac{D_2}{D_0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
$\frac{D_2}{D_0}=10^{\frac{1}{2}}$, $D_2=10^{\frac{1}{2}}D_0$에서 $k=10^{\frac{1}{2}}$
$\therefore \log k=\log 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

실고

$\frac{D_2}{D_0}$는 두 망원경의 렌즈의 지름의 길이 D_2와 D_0의 비이다.
이때 $\frac{D_2}{D_0}=10^{\frac{1}{2}}$이므로 D_0의 길이보다 $10^{\frac{1}{2}}$배 더 길게 하면 D_2의 길이가 된다.

기본강화 본문 123~125쪽

평가원 기출

01 Action 로그의 정의에 의하여 7^a의 값을 구한다.

$a=\log_7\sqrt{7-\sqrt{48}}$에서 로그의 정의에 의하여

$7^a=\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

이때 $7^{2a}=(7^a)^2=\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2=7-4\sqrt{3}$이므로

$7^{-2a}=\dfrac{1}{7^{2a}}=\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}$

$=\dfrac{7+4\sqrt{3}}{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$

$\therefore \dfrac{7^{2a}-7^{-2a}}{7^{2a}+7^{-2a}}=\dfrac{(7-4\sqrt{3})-(7+4\sqrt{3})}{(7-4\sqrt{3})+(7+4\sqrt{3})}$

$=-\dfrac{8\sqrt{3}}{14}=-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

02 Action 로그의 (밑)>0, (밑)≠1과 (진수)>0을 이용하여 x에 대한 부등식을 세운다.

밑 조건에서 $a>0$, $a\neq1$이므로

$0<a<1$ 또는 $a>1$ ····· ㉠

진수 조건에 의해 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+a+2>0$이어야 한다.

이때 이차방정식 $x^2-2ax+a+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-(a+2)<0$

$a^2-a-2<0$, $(a+1)(a-2)<0$

$\therefore -1<a<2$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<a<1$ 또는 $1<a<2$

03 Action $\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x-1}{x}$의 x 대신 2, 3, 4, ···, n, $n+1$을 대입한다.

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x-1}{x}$이므로

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n+1)$

$=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{3}+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3}{4}+\cdots+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{n}{n+1}$

$=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n}{n+1}\right)$

$=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{n+1}$

따라서 $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{n+1}=6$이므로 로그의 정의로부터

$\dfrac{1}{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{1}{64}$, $n+1=64$

$\therefore n=63$

04 Action $a^4=b^5=c^7$을 이용하여 $\log_a b$, $\log_b c$, $\log_c a$의 값을 구한다.

(i) $a^4=b^5$에서 $b=a^{\frac{4}{5}}$

$\log_a b=\log_a a^{\frac{4}{5}}=\dfrac{4}{5}\log_a a=\dfrac{4}{5}$

(ii) $b^5=c^7$에서 $c=b^{\frac{5}{7}}$

$\log_b c=\log_b b^{\frac{5}{7}}=\dfrac{5}{7}\log_b b=\dfrac{5}{7}$

(iii) $a^4=c^7$에서 $a=c^{\frac{7}{4}}$

$\log_c a=\log_c c^{\frac{7}{4}}=\dfrac{7}{4}\log_c c=\dfrac{7}{4}$

이때 $\dfrac{5}{7}<\dfrac{4}{5}<\dfrac{7}{4}$이므로

$\log_b c<\log_a b<\log_c a$

다른 풀이

$a^4=b^5=c^7=k\,(k>0)$로 놓으면

$a=k^{\frac{1}{4}}$, $b=k^{\frac{1}{5}}$, $c=k^{\frac{1}{7}}$

$\log_a b=\dfrac{\log b}{\log a}=\dfrac{\log k^{\frac{1}{5}}}{\log k^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{\frac{1}{5}\log k}{\frac{1}{4}\log k}=\dfrac{4}{5}$

$\log_b c=\dfrac{\log c}{\log b}=\dfrac{\log k^{\frac{1}{7}}}{\log k^{\frac{1}{5}}}=\dfrac{\frac{1}{7}\log k}{\frac{1}{5}\log k}=\dfrac{5}{7}$

$\log_c a=\dfrac{\log a}{\log c}=\dfrac{\log k^{\frac{1}{4}}}{\log k^{\frac{1}{7}}}=\dfrac{\frac{1}{4}\log k}{\frac{1}{7}\log k}=\dfrac{7}{4}$

$\therefore \log_b c<\log_a b<\log_c a$

05 Action $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $A^3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, ···을 구하여 $A^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$을 추정한다.

$A=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$에서

$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

$A^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2\\3^2\end{pmatrix}$

$A^3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=AA^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3^2\\3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^2\\3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^3\\3^3\end{pmatrix}$

·····

따라서 $A^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n\\3^n\end{pmatrix}$이므로 $a_n=3^n$, $b_n=3^n$

$\therefore \log_3 a_3+\log_3 b_{30}=\log_3 3^3+\log_3 3^{30}$

$=3\log_3 3+30\log_3 3$

$=3+30=33$

06 Action 로그의 성질을 활용한다.

$\log_5(b^2+c^2-a^2)=\log_5 b+\log_5 c$에서

$\log_5(b^2+c^2-a^2)=\log_5 bc$이므로 $b^2+c^2-a^2=bc$

이때 코사인법칙으로부터

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$

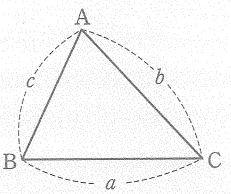
$\therefore A=60^\circ$ ($\because 0^\circ<A<180^\circ$)

개념 다시보기 코사인법칙

$\triangle ABC$의 세 각 A, B, C에 대응하는 세 변의 길이를 각각 a, b, c라 할 때 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

이때 이 식을 변형하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$을 얻을 수 있다.



※ 코사인법칙은 삼각형에서 두 변의 길이와 끼인각의 크기가 주어지고 나머지 한 변의 길이를 구할 때 또는 세 변의 길이를 알고 각의 크기를 구할 때 사용한다.

07 Action 밑이 10인 로그로 통일시킨다.

$\log_3 2\cdot\log_2 5\cdot\log_5 6=a$에서 좌변을 밑이 10인 로그로 변환하면

$a=\dfrac{\log_{10}2}{\log_{10}3}\times\dfrac{\log_{10}5}{\log_{10}2}\times\dfrac{\log_{10}6}{\log_{10}5}=\dfrac{\log_{10}6}{\log_{10}3}=\log_3 6$

즉 $a=\log_3 6$이고, 로그의 정의로부터 $3^a=6$이므로

$3^a+3^{-a}=6+\dfrac{1}{6}=\dfrac{37}{6}$

08 Action $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$과 로그의 성질을 이용한다.

$\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_4 x}+\dfrac{1}{\log_{12} x}+\dfrac{1}{\log_{25} x}=\dfrac{2}{\log_k x}$에서

$\dfrac{1}{\log_3 x}=\log_x 3$, $\dfrac{1}{\log_4 x}=\log_x 4$, …이므로

$\log_x 3+\log_x 4+\log_x 12+\log_x 25=2\log_x k$

$\log_x(3\times4\times12\times25)=\log_x k^2$

이때 $x\neq1$이므로 $k^2=3^2\times4^2\times5^2=60^2$ $\therefore k=60$ ($\because k>0$)

09 Action 밑의 변환 공식을 이용하여 밑이 같은 로그로 변환한다.

(1) $100^x=125$의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$x\log_5 100=\log_5 125$, 즉 $x\log_5 100=3$에서

$\dfrac{3}{x}=\log_5 100$

또 $4^y=5$의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$y\log_5 4=\log_5 5$, 즉 $y\log_5 4=1$에서 $\dfrac{1}{y}=\log_5 4$

$\therefore \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=\log_5 100-\log_5 4=\log_5\dfrac{100}{4}=\log_5 25=2$

다른 풀이

앞에서 배운 지수를 이용하여 이 문제를 풀면 다음과 같다.

$100^x=125$에서 양변을 $\dfrac{1}{x}$제곱하면

$(100^x)^{\frac{1}{x}}=125^{\frac{1}{x}}$, $100=125^{\frac{1}{x}}=(5^3)^{\frac{1}{x}}$

$\therefore 5^{\frac{3}{x}}=100$ …… ㉠

$4^y=5$에서 양변을 $\dfrac{1}{y}$제곱하면

$(4^y)^{\frac{1}{y}}=5^{\frac{1}{y}}$ $\therefore 5^{\frac{1}{y}}=4$ …… ㉡

㉠÷㉡에서 $5^{\frac{3}{x}}\div5^{\frac{1}{y}}=100\div4=25$

즉 $5^{\frac{3}{x}-\frac{1}{y}}=25=5^2$이므로 $\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=2$

(2) $16^x=36$에서 $x=\log_{16}36=\log_{4^2}6^2=\log_4 6$,

$81^y=36$에서 $y=\log_{81}36=\log_{9^2}6^2=\log_9 6$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_4 6}+\dfrac{1}{\log_9 6}=\log_6 4+\log_6 9$

$=\log_6(4\times9)=\log_6 36$

$=\log_6 6^2=2$

다른 풀이

$16^x=36$에서 양변을 $\dfrac{1}{x}$제곱하면 $(16^x)^{\frac{1}{x}}=36^{\frac{1}{x}}$

$\therefore 36^{\frac{1}{x}}=16$ …… ㉠

$81^y=36$에서 양변을 $\dfrac{1}{y}$제곱하면 $(81^y)^{\frac{1}{y}}=36^{\frac{1}{y}}$

$\therefore 36^{\frac{1}{y}}=81$ …… ㉡

㉠×㉡에서 $36^{\frac{1}{x}}\times36^{\frac{1}{y}}=16\times81=2^4\times3^4=6^4$

$36^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=6^4=36^2$ $\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$

10 Action $\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$이다.

$\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$에서 $2<\log_2 5<3$

따라서 $a=2$이고,

$b=\log_2 5-2=\log_2 5-\log_2 4=\log_2\dfrac{5}{4}$이므로

$\dfrac{2^a+2^b}{2^{-a}+2^{-b}}=\dfrac{2^2+2^{\log_2\frac{5}{4}}}{2^{-2}+2^{-\log_2\frac{5}{4}}}$

$=\dfrac{4+\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}}=\dfrac{\frac{21}{4}}{\frac{21}{20}}=\dfrac{20}{4}=5$

다른 풀이

$a+b=\log_2 5$이므로

$\dfrac{2^a+2^b}{2^{-a}+2^{-b}}=\dfrac{(2^a+2^b)(2^a\times2^b)}{(2^{-a}+2^{-b})(2^a\times2^b)}=\dfrac{(2^a+2^b)\times2^{a+b}}{2^b+2^a}$

$=2^{a+b}=2^{\log_2 5}=5$

11 Action $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$를 이용한다.

$$x=\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

$$=\log_{10}\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)$$

$$=\log_{10}\frac{100}{2}=\log_{10}50$$

$\therefore 100^x=100^{\log_{10}50}=50^{\log_{10}100}=50^2=\mathbf{2500}$

($a^{\log_a b}=b^{\log_a a}$)

12 Action 상용로그표를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

(1) $x=1.21^{21}$으로 놓고 양변에 상용로그를 취하면

$\log x=\log 1.21^{21}=21\log 1.21$

상용로그표에서 $\log 1.21=0.0828$이므로

$\log x=21\times0.0828=1.7388$

이때 $\log 5.48=0.7388$이고, $\log x$의 지표가 1이므로 x의 정수 부분은 두 자리의 수이다.

따라서 $x=54.8$이므로 $1.21^{21}=\mathbf{54.8}$

(2) $x=\sqrt[5]{0.026}$으로 놓고 양변에 상용로그를 취하면

$\log x=\log\sqrt[5]{0.026}=\log 0.026^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\log 0.026$

상용로그표에서 $\log 2.6=0.4150$이므로

$\log x=\frac{1}{5}\log(10^{-2}\times2.6)=\frac{1}{5}(-2+0.4150)$

$=-0.3170=-1+(1-0.3170)=\bar{1}.6830$

이때 $\log 4.82=0.6830$이고, $\log x$의 지표가 -1이므로 x는 소수점 아래 첫째 자리부터 0이 아닌 숫자가 나타난다.

따라서 $x=0.482$이므로 $\sqrt[5]{0.026}=\mathbf{0.482}$

13 Action 먼저 $\log 36$의 지표부터 구한다.

$\log 10<\log 36<\log 100$에서 $1<\log 36<2$이므로

$n=1$이고, $a=\log 36-1=\log 36-\log 10=\log\frac{36}{10}$

$\therefore 10^n+10^a=10^1+10^{\log\frac{36}{10}}=10+\frac{36}{10}=\frac{136}{10}=\mathbf{\frac{68}{5}}$

14 Action $\log 70$에서 지표 n과 가수 a를 구한다.

$\log 70=\log 10+\log 7=1+\log 7$이므로

$n=1$, $a=\log 7$ ($\because 0<\log 7<1$)

$\therefore 7^{\frac{1}{n}}=7^1=7$, $7^{\frac{1}{a}}=7^{\frac{1}{\log 7}}=7^{\log_7 10}=10$

이때 x^2의 계수가 1이고 $7^{\frac{1}{n}}$, $7^{\frac{1}{a}}$, 즉 7, 10을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-(7+10)x+7\times10=0$ $\therefore \mathbf{x^2-17x+70=0}$

개념 다시보기 이차방정식의 작성

두 수 α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \iff x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

수능 기출

15 Action $1\le n\le9$, $10\le n\le99$, $100\le n\le150$인 경우로 나눈다.

(i) $1\le n\le9$일 때 $\log n$의 지표는 0이므로

가수 $f(n)$의 값은 $\log1$, $\log2$, …, $\log9$로 9개이다.

(ii) $10\le n\le99$일 때 $\log n$의 지표는 1이므로

$f(n)=\log n-1=\log n-\log10=\log\frac{n}{10}$

따라서 가수 $f(n)$의 값은 $\log\frac{10}{10}$, $\log\frac{11}{10}$, …, $\log\frac{99}{10}$이고, 이때 $\log\frac{10}{10}$, $\log\frac{20}{10}$, $\log\frac{30}{10}$, …, $\log\frac{90}{10}$은 (i)의 값과 중복되므로 $10\le n\le99$일 때 가수 $f(n)$의 값은 $90-9=81$개이다.

(iii) $100\le n\le150$일 때 $\log n$의 지표는 2이므로

$f(n)=\log n-2=\log n-\log100=\log\frac{n}{100}$

따라서 가수 $f(n)$의 값은 $\log\frac{100}{100}$, $\log\frac{101}{100}$, …, $\log\frac{150}{100}$이고, 이때 $\log\frac{100}{100}$, $\log\frac{110}{100}$, …, $\log\frac{150}{100}$은 (i), (ii)의 값과 중복되므로 $100\le n\le150$일 때 가수 $f(n)$의 값은 $51-6=45$개이다.

(i), (ii), (iii)으로부터 집합 A의 원소의 개수는

$9+81+45=\mathbf{135}$(개)

수능 기출

16 Action 자연수 N이 두 자리 수이므로 $\log N$의 지표는 1이다.

자연수 N이 두 자리 수이므로 $\log N$의 지표가 1이다. 즉

$\log N=1+\alpha$ $\therefore \alpha=\log N-1$

이것을 $\frac{1}{2}+\log N=\alpha+\log_4\frac{N}{8}$에 대입하면

$\frac{1}{2}+\log N=\log N-1+\log_4\frac{N}{8}$, $\frac{3}{2}=\log_4N-\log_48$

$\frac{3}{2}=\log_4N-\frac{3}{2}$, $\log_4N=3$ $\therefore N=4^3=\mathbf{64}$

($\log_48=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$)

17 Action $\log X$와 $\log Y$를 x, y로 나타낸다.

두 양수 X, Y는 정수 부분이 한 자리인 수이므로

$0\le\log X<1$, $0\le\log Y<1$

또 두 양수 X, Y의 상용로그의 가수가 각각 x, y이므로

$\log X=x$, $\log Y=y$ $\therefore 0\le x<1$, $0\le y<1$

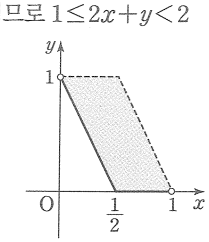
이때 X^2Y의 상용로그의 지표가 1이므로 $1\le\log X^2Y<2$에서

$\log X^2Y=2\log X+\log Y=2x+y$이므로 $1\le2x+y<2$

(i) $1\le2x+y$에서 $y\ge-2x+1$

(ii) $2x+y<2$에서 $y<-2x+2$

$0\le x<1$, $0\le y<1$에서 (i), (ii)를 모두 만족시키는 점 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



18 Action N^{30}이 49자리 정수이면 $\log N^{30}$의 지표는 48이다.

N^{30}이 49자리 정수이므로 $\log N^{30}$의 지표는 48이다.

따라서 $\log N^{30}=48.\times\times\times\times$이므로

$48\le\log N^{30}<49$, $48\le 30\log N<49$

$\therefore 1.6\le\log N<1.63\times\times$ ····· ㉠

이때 $\log N^{12}=12\log N$이므로

㉠의 각 변에 12를 곱하면

$19.2\le 12\log N<19.5\times\times\times$

즉 $\log N^{12}$의 지표가 19이므로 N^{10}은 **20**자리 정수이다.

19 Action 21^{10}의 상용로그 값의 가수 부분을 구한다.

$\log 21^{10}=10\log 21=10\log(3\times 7)$

$=10(\log 3+\log 7)=10(0.4771+0.8451)$

$=10\times 1.3222=13.222$

즉 $\log 21^{10}$의 가수 부분은 0.222이다.

이때 $\log x=0.222$라고 하면

$\log 1=0$, $\log 2=0.3010$이므로 $\log 1<\log x<\log 2$

$\therefore 1<x<2$

따라서 21^{10}의 최고 자리의 숫자는 1

20 Action 두 상용로그 값의 가수가 같으면 두 상용로그 값의 차를 이용한다.

$\log x$의 지표가 2이므로 $2\le\log x<3$

이때 $\log x$의 가수와 $\log x^2$의 가수가 같으므로

$\log x^2-\log x=2\log x-\log x=\log x=$(정수)

$2\le\log x<3$이고, $\log x$는 정수이므로

$\log x=2$

$\therefore x=10^2=$**100**

21 Action $[\log x]$는 $\log x$의 지표이다.

$\log x$의 진수 x가 n자리 수이면 $\log x$의 지표는 $n-1$이고,

$[\log x]$는 $\log x$의 지표와 같으므로

$[\log x]=n-1$

따라서 $1\le x\le 9$일 때 $[\log x]=0$이고

$10\le x\le 99$일 때 $[\log x]=1$이므로

(주어진 식)$=9\times 0+90\times 1=$**90**

참고

$\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라고 하면

$[\log x]=n$이므로

$[\log x]$는 $\log x$의 지표와 같다.

22 Action $[\log 2N]=[\log N]+1$이므로 $\log 2N$의 지표는 $\log N$의 지표보다 1만큼 크다.

N이 두 자리 자연수이므로

$\log N=1+\alpha$ ($0\le\alpha<1$)라고 하면 $[\log N]=1$이고,

$\log 2N=\log 2+\log N=0.3010+1+\alpha$

이때 $[\log 2N]=[\log N]+1=1+1=2$이므로

$1\le\alpha+0.3010$에서 $0.6990\le\alpha<1$

$\therefore 1.6990\le\log N<2$

ㄱ. $\log N^2=2\log N$이므로

$2\times 1.6990\le 2\log N<2\times 2$

$\therefore 3.398\le 2\log N<4$

따라서 $\log N^2$의 지표가 3이므로 N^2은 4자리 자연수이다.

ㄴ. $\log N^3=3\log N$이므로

$3\times 1.6990\le 3\log N<3\times 2$

$\therefore 5.097\le 3\log N<6$

따라서 $\log N^3$의 지표가 5이므로 N^3은 6자리 자연수이다.

ㄷ. $\log N^5=5\log N$이므로

$5\times 1.6990\le 5\log N<5\times 2$

$\therefore 8.495\le 5\log N<10$

따라서 $\log N^5$의 지표가 8 또는 9이므로 N^5은 9자리 자연수 또는 10자리 자연수이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

23 Action $\log E_1=11.8+1.5M$, $\log E_2=11.8+1.5(M+1)$에서 $\frac{E_2}{E_1}$의 값을 구한다.

처음 지진의 에너지를 E_1이라고 하면

$\log E_1=11.8+1.5M$ ····· ㉠

지진의 규모가 1 증가할 때의 지진의 에너지를 E_2라고 하면

$\log E_2=11.8+1.5(M+1)$ ····· ㉡

㉡−㉠에서 $\log E_2-\log E_1=1.5$이므로 $\log\frac{E_2}{E_1}=1.5$

이때 $\log 3.16=0.5$에서 $1.5=\log 31.6$이므로

$\log\frac{E_2}{E_1}=\log 31.6$ $\therefore\frac{E_2}{E_1}=31.6$

따라서 지진의 규모가 1 증가할 때, 지진파 에너지는 약 **31.6**배 증가한다.

24 Action $p=92-28\log_5 t$에 $t=10$을 대입한다.

10분 후에 정확하게 음절을 기억하는 학생 수의 비율은

$92-28\log_5 10=92-28\times\frac{\log 10}{\log 5}=92-28\times\frac{1}{0.7}$

$=92-40=52(\%)$ ($\log 5=\log\frac{10}{2}=1-\log 2=0.7$)

따라서 학생 1000명 중 10분 후에 정확하게 음절을 기억하는 학생의 수는 $1000\times\frac{52}{100}=$**520**(명)

수능 기출

25 Action $\log\frac{C}{C_0}=-kt$에 주어진 결과를 대입한다.

물 1 mL당 초기 박테리아 수가 8×10^5이고,
약품을 투여한 지 3시간이 지난 후 물 1 mL당 박테리아 수가 2×10^5이므로 $\log\frac{2\times10^5}{8\times10^5}=-3k$에서

$\log\frac{1}{4}=-3k$, $3k=\log 4$

$\therefore k=\frac{2}{3}\log 2=\frac{2}{3}\times0.3=0.2$

이때 물 1 mL당 박테리아 수가 8×10^3이 되는 것은 약품을 투여한 지 a시간 후이므로

$\log\frac{8\times10^3}{8\times10^5}=-0.2a$에서

$\log\frac{1}{10^2}=-0.2a$, $-2=-\frac{1}{5}a$

$\therefore a=10$

LECTURE **로그와 관련된 수학 외적 문제의 해결 방법**

로그 단원과 관련지어 출제되는 수학 외적 문제는

❶ 문제에 주어진 상황을 식으로 표현한다. 이때 식이 주어진 경우에는 각 변수가 의미하는 것을 정확히 파악한다.

❷ 관계식을 이용하여 문제의 조건들을 표현한다.

❸ 로그의 기본 성질이나 밑의 변환 공식 등을 이용하여 구하는 값을 계산한다.

4. 로그함수

개념 강화 드릴 ❶ 본문 127쪽

01 (1) $y=5^x-1$에서 $y+1=5^x$
로그의 정의로부터 $x=\log_5(y+1)$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_5(x+1)\ (x>-1)$

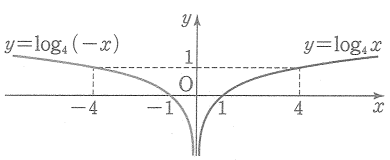
(2) $y=\log_3 x+2$에서 $y-2=\log_3 x$
로그의 정의로부터 $x=3^{y-2}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=3^{x-2}$

02 (1) $y=\log_2(x-1)$의 정의역은 $\{x|x>1\}$이고, ($x-1>0$ $\therefore x>1$)
점근선의 방정식은 $x=1$이다.

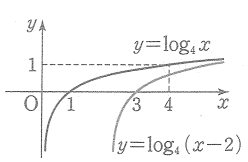
(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x+3)$의 정의역은 $\{x|x<3\}$이고, ($-x+3>0$ $\therefore x<3$)
점근선의 방정식은 $x=3$이다.

참고
(진수)>0인 조건으로부터 정의역을 구한다.

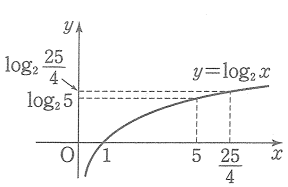
03 (1) 함수 $y=\log_4(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 것으로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) 함수 $y=\log_4(x-2)$의 그래프는 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축 방향으로 2만큼 평행이동시킨 것으로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

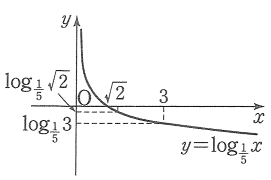


04 (1)



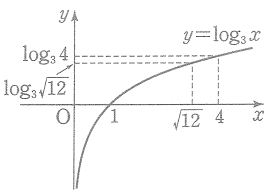
$\therefore \log_2 5<\log_2\frac{25}{4}$

(2)



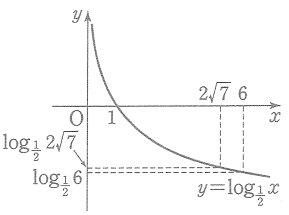
$\therefore \log_{\frac{1}{5}}3<\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{2}$

(3)



$\therefore \log_3\sqrt{12}<\log_3 4$

(4)

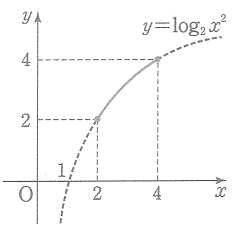


$\therefore \log_{\frac{1}{2}}6<\log_{\frac{1}{2}}2\sqrt{7}$

05 (1) 로그함수 $y=\log_2 x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $2\le x\le 4$에서

최댓값은 $x=4$일 때 4이고,

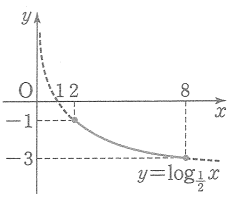
최솟값은 $x=2$일 때 2이다.



(2) 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $2\le x\le 8$에서

최댓값은 $x=2$일 때 -1이고,

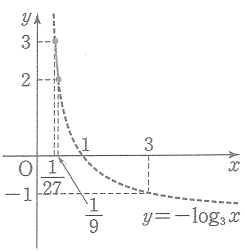
최솟값은 $x=8$일 때 -3이다.



(3) 로그함수 $y=-\log_3 x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $\frac{1}{27}\le x\le\frac{1}{9}$에서

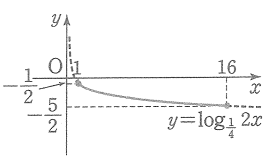
최댓값은 $x=\frac{1}{27}$일 때 3이고,

최솟값은 $x=\frac{1}{9}$일 때 2이다.



(4) 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $1\le x\le 16$에서

최댓값은 $x=1$일 때 $-\frac{1}{2}$



이고, 최솟값은 $x=16$일 때 $-\frac{5}{2}$이다.

참고

$y=\log_{\frac{1}{4}}2x$에서

$y=\log_{\frac{1}{4}}2x=\log_{\frac{1}{4}}2+\log_{\frac{1}{4}}x=\log_{\frac{1}{4}}x-\frac{1}{2}$

따라서 $y=\log_{\frac{1}{4}}2x$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$의 그래프를 y축 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동시킨 것이다.

06 $y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x+3$에서 $\log_2 x$를 t로 치환하면

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

또 $1\le x\le 8$에서 $\log_2 1\le\log_2 x\le\log_2 8$

$\therefore 0\le t\le 3$ ($\log_2 8=\log_2 2^3=3$)

따라서 최댓값은 $t=3$일 때 **6**, 최솟값은 $t=1$일 때 **2**이다.

확인 문제 본문 128~138쪽

01-1 Action 로그함수의 정의역은 (진수)>0인 조건에서 구한다.

ㄱ. $y=\log_2(x^2+1)$에서 진수 x^2+1은 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$을 만족시킨다. 따라서 함수 $y=\log_2(x^2+1)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다. (거짓)

ㄴ. $0<$(밑)<1일 때 로그함수 $y=\log_a x$는 감소함수이므로 $x_1<x_2$이면 $\log_{\frac{1}{2}}x_1>\log_{\frac{1}{2}}x_2$이다. (거짓)

ㄷ. 로그함수 $y=\log_a x$는 일대일함수이므로 '$x_1\ne x_2$이면 $\log_a x_1\ne\log_a x_2$이다.'가 참이다. 따라서 그 대우인 '$\log_a x_1=\log_a x_2$이면 $x_1=x_2$이다.'도 참이다.

ㄹ. 로그함수 $y=\log_2 x$의 역함수는 $y=2^x$이고,

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right\}^x=2^x$이므로

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$는 $y=\log_2 x$의 역함수이다. 따라서 $y=\log_2 x$의 그래프와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

02-1 Action $f(x)=\log_2 x$에 주어진 조건을 대입한다.

$f(x)=\log_2 x$이므로

$f(ab)=3$에서 $\log_2 ab=3$ $\therefore \log_2 a+\log_2 b=3$ ····· ㉠

$f\left(\frac{b}{a}\right)=5$에서 $\log_2\frac{b}{a}=5$ $\therefore \log_2 b-\log_2 a=5$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\log_2 a=-1$, $\log_2 b=4$

$\therefore f(a^5b^8)=\log_2 a^5b^8=\log_2 a^5+\log_2 b^8$

$=5\log_2 a+8\log_2 b$

$=-5+32=27$

02-2 Action $(g\circ f)(x)=g(f(x))$를 이용한다.

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\log_5 x)=[\log_5 x]$이므로

$(g\circ f)(x)$는 $\log_5 x$의 지표를 뜻한다.

즉 $(g\circ f)(9)$는 $\log_5 9$의 지표이고, $(g\circ f)(125)$는 $\log_5 125$의 지표이다. 이때

$1=\log_5 5<\log_5 9<\log_5 25=2$, $\log_5 125=3$

이므로 $\log_5 9$의 지표는 1, $\log_5 125$의 지표는 3이다.

$\therefore (g\circ f)(9)+(g\circ f)(125)=1+3=4$

3-1 Action 원래 함수의 치역이 역함수의 정의역이 된다.

(1) $y=3^x-1$에서 $y+1=3^x$

로그의 정의로부터 $x=\log_3(y+1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $\boldsymbol{y=\log_3(x+1)\ (x>-1)}$

참고

역함수의 정의역 $\{x|x>-1\}$은 원래 함수 $y=3^x-1$의 치역인 $\{y|y>-1\}$로부터 구한다.

(2) $y=2^{x-3}-3$에서 $y+3=2^{x-3}$

로그의 정의로부터 $x-3=\log_2(y+3)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y-3=\log_2(x+3)$

$\therefore\ \boldsymbol{y=\log_2(x+3)+3\ (x>-3)}$

참고

원래 함수 $y=2^{x-3}-3$의 치역이 $\{y|y>-3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x>-3\}$이 된다.

(3) $y=2+\log_2(x-3)$에서 $y-2=\log_2(x-3)$

로그의 정의로부터 $x-3=2^{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y-3=2^{x-2}$

$\therefore\ \boldsymbol{y=2^{x-2}+3}$

참고

원래 함수 $y=2+\log_2(x-3)$의 치역이 실수 전체의 집합이므로 역함수의 정의역도 실수 전체의 집합이 된다.

따라서 이 경우 정의역을 따로 표시하지 않아도 된다.

(4) $y=\log_2(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geq 1)$에서

로그의 정의로부터 $x+\sqrt{x^2-1}=2^y$, 즉 $2^y-x=\sqrt{x^2-1}$

이 식의 양변을 제곱하면

$2^{2y}-2x\cdot 2^y+x^2=x^2-1,\ 2x\cdot 2^y=2^{2y}+1$

$2x=2^y+2^{-y}\qquad \therefore\ x=\frac{1}{2}(2^y+2^{-y})$

x와 y를 서로 바꾸면 $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})\ (x\geq 0)}$

참고

원래 함수 $y=\log_2(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geq 1)$의 치역이 $\{y|y\geq 0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\geq 0\}$이 된다.

3-2 Action $(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$(f\circ g)(x)=x$에서 $g(x)$는 함수 $f(x)=\log_3 x$의 역함수이므로 $g(x)=3^x$이다.

이때 $g(\alpha)=\frac{1}{3}$, $g(\beta)=\frac{1}{5}$에서 $3^\alpha=\frac{1}{3}$, $3^\beta=\frac{1}{5}$

$\therefore\ g(\alpha+\beta)=3^{\alpha+\beta}=3^\alpha 3^\beta=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{1}{15}}$

다른 풀이

$g(x)$가 함수 $f(x)=\log_3 x$의 역함수이므로

$g(\alpha)=\frac{1}{3}$, $g(\beta)=\frac{1}{5}$에서 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\alpha$, $f\left(\frac{1}{5}\right)=\beta$

$\therefore\ \alpha=\log_3\frac{1}{3}$, $\beta=\log_3\frac{1}{5}$

이때 $g(\alpha+\beta)=k$라고 하면 $f(k)=\alpha+\beta$에서

$\log_3 k=\alpha+\beta=\log_3\frac{1}{3}+\log_3\frac{1}{5}$

$=\log_3\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\right)=\log_3\frac{1}{15}$

따라서 $k=\frac{1}{15}$, 즉 $g(\alpha+\beta)=\frac{1}{15}$이다.

실패 비법 **확인 01** 본문 131 쪽

함수 $f(x)=2\log_7 x$에서

ㄱ. $f(xy)=2\log_7 xy=2(\log_7 x+\log_7 y)$

$=2\log_7 x+2\log_7 y=f(x)+f(y)$ (참)

ㄴ. [반례] $x=7$, $y=42$일 때

$f(x+y)=f(49)=2\log_7 49=2\times 2=4$

$f(x)f(y)=f(7)f(42)=2\log_7 7\times 2\log_7 42=4\log_7 42$

이때 $4\log_7 42>4$이므로 $f(x+y)\neq f(x)f(y)$ (거짓)

ㄷ. $f(\sqrt[3]{x})=2\log_7\sqrt[3]{x}=2\log_7 x^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{3}\times\underbrace{2\log_7 x}_{f(x)}=\frac{1}{3}f(x)$ (참)

ㄹ. [반례] $x=7^3$, $y=7$일 때

$f(x)=f(7^3)=2\log_7 7^3=6$, $f(y)=f(7)=2\log_7 7=2$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(\frac{7^3}{7}\right)=f(7^2)=2\log_7 7^2=4$

이때 $\frac{f(x)}{f(y)}=\frac{6}{2}=3\neq f\left(\frac{x}{y}\right)=4$이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right)\neq\frac{f(x)}{f(y)}$ (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4-1 Action $f:(x,y)\longrightarrow(x+a,y+b)$는 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동시킨 것이다.

$\log(10x-5)-2=\log 10\left(x-\frac{1}{2}\right)-2$

$=\underbrace{\log 10}_{\log 10=1}+\log\left(x-\frac{1}{2}\right)-2$

$=\log\left(x-\frac{1}{2}\right)-1$

이때 $y=\log\left(x-\frac{1}{2}\right)-2$의 그래프는 함수 $y=\log x$의 그래프를 x축 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다.

$\therefore\ \boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{b=-1}$

4-2 Action $y=\log_b ax$의 그래프는 감소함수이므로 $0<b<1$이다.

함수 $y=\log_b ax$의 그래프는 x의 값이 증가할 때 y의 값이 감소하므로 $0<b<1$이다.

또 주어진 그래프에서 $x=1$일 때 $y<0$이므로

$y=\log_b ax$에 $x=1$을 대입하면

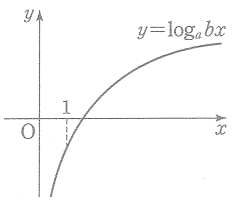
$\log_b a<0$ $\therefore a>1$ ($\because 0<b<1$)

따라서 함수 $y=\log_a bx$의 그래프는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다. ($\because a>1$)

또 $x=1$을 $y=\log_a bx$에 대입하면

$y=\log_a b<0$ ($\because 0<b<1$)

이므로 함수 $y=\log_a bx$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



5-1 Action 점 (a, b)가 $y=2^x$의 그래프 위의 점이면 점 (b, a)는 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이다.

점 A는 $y=2^x$의 그래프와 y축과의 교점이므로 점 A의 좌표는 $(0, 1)$이다. 따라서 점 B의 y좌표가 1이므로

$1=\log_2 x$에서 $x=2$ $\therefore$ B$(2, 1)$

또 $y=\log_2 x$와 $y=2^x$은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

따라서 점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 점 C의 좌표는 $(1, 2)$이고, 점 D의 y좌표가 2이므로

$2=\log_2 x$에서 $x=4$ $\therefore$ D$(4, 2)$

또 점 D와 점 E도 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 점 E의 좌표는 $(2, 4)$이다.

따라서 점 F의 y좌표가 4이므로 $4=\log_2 x$에서 $x=16$

즉 점 F의 좌표는 $\mathbf{(16, 4)}$이다.

6-1 Action 두 점 A, B의 y좌표는 0이고, 두 점 C, D의 y좌표는 1이다.

(i) 두 점 A, B의 x좌표는 $y=0$을 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(\log_2 x)$에 각각 대입하여 구한다. 즉

$\log_2 x=0$에서 $x=1$ $\therefore$ A$(1, 0)$

$\log_2(\log_2 x)=0$에서 $\log_2 x=1$, $x=2$ $\therefore$ B$(2, 0)$

(ii) 두 점 C, D의 x좌표는 $y=1$을 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(\log_2 x)$에 각각 대입하여 구한다. 즉

$\log_2 x=1$에서 $x=2$ $\therefore$ C$(2, 1)$

$\log_2(\log_2 x)=1$에서 $\log_2 x=2$, $x=4$ $\therefore$ D$(4, 1)$

이때 두 변 AB, CD는 서로 평행하므로 사각형 ABCD는 사다리꼴이고, 그 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2+1)\times 1=\frac{3}{2}$

7-1 Action 밑을 같게 하고 진수끼리 비교한다.

(1) 3, $\log_3 8$, $\log_9 16$에서

$3=\log_3 3^3=\log_3 27$

$\log_9 16=\log_{3^2} 4^2=\frac{2}{2}\log_3 4=\log_3 4$

이때 밑이 1보다 크고 진수의 크기를 비교하면 $4<8<27$이므로 $\log_3 4<\log_3 8<\log_3 27$

$\therefore \mathbf{\log_9 16<\log_3 8<3}$

(2) $2\log_{\frac{1}{2}} 3$, $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{16}$, $\log_2 7$에서

$2\log_{\frac{1}{2}} 3=\log_{\frac{1}{2}} 3^2=\log_{\frac{1}{2}} 9$

$\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{16}=\log_{(\frac{1}{2})^2}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{2}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

$\log_2 7=\log_{(\frac{1}{2})^{-1}} 7=-\log_{\frac{1}{2}} 7=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{7}$

이때 밑이 0과 1 사이의 수이고 진수의 크기를 비교하면

$\frac{1}{7}<\frac{1}{4}<9$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} 9<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{7}$

$\therefore \mathbf{2\log_{\frac{1}{2}} 3<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{16}<\log_2 7}$

다른 풀이

밑을 2로 같게 하여 대소를 비교해도 된다. 즉

$2\log_{\frac{1}{2}} 3=2\log_{2^{-1}} 3=-2\log_2 3=\log_2 3^{-2}=\log_2\frac{1}{9}$

$\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{16}=\log_{2^{-2}} 4^{-2}=\frac{-2}{-2}\log_2 4=\log_2 4$

이때 밑이 1보다 크고 진수의 크기를 비교하면 $\frac{1}{9}<4<7$

이므로 $2\log_{\frac{1}{2}} 3<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{16}<\log_2 7$

LECTURE **진수는 같고 밑이 다른 경우의 대소 비교**

$\log_2 7$, $\log_3 7$과 같이 진수는 같고 밑이 다른 두 수의 크기를 비교할 경우에는 로그함수 $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$)가 a의 값에 따라 다음과 같은 성질을 가짐을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

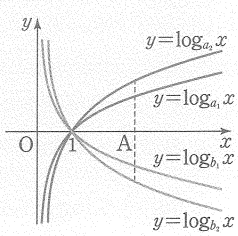
(i) $a_1>a_2>1$일 때

$x>1$에서 $y=\log_{a_1} x$의 그래프는 $y=\log_{a_2} x$의 그래프보다 x축에 가깝다.

⇨ $\log_{a_1} A<\log_{a_2} A (A>1)$

(ii) $0<b_1<b_2<1$일 때

$x>1$에서 $y=\log_{b_1} x$의 그래프는 $y=\log_{b_2} x$의 그래프보다 x축에 가깝다. ⇨ $\log_{b_1} A>\log_{b_2} A (A>1)$



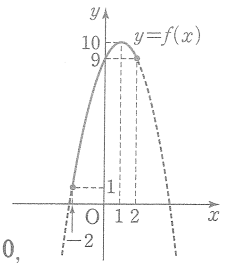
※ 간단한 경우에서 확인해도 된다. 즉

$\log_2 16=\log_2 2^4=4$, $\log_4 16=\log_4 4^2=2$

$\therefore \log_2 16>\log_4 16$

08-1 Action 진수를 $f(x)$로 놓고 주어진 x값의 범위에서 $f(x)$의 범위를 구한다.

$y=\log_{\frac{1}{10}}(-x^2+2x+9)$에서
$f(x)=-x^2+2x+9$라고 하면
$f(x)=-(x-1)^2+10$
오른쪽 그림에서 $-2\le x\le 2$일 때
$1\le f(x)\le 10$이고, 주어진 함수는
밑이 0과 1 사이의 수이므로
최댓값은 $f(x)=1$일 때 $y=\log_{\frac{1}{10}}1=0$,
최솟값은 $f(x)=10$일 때 $y=\log_{\frac{1}{10}}10=\log_{10^{-1}}10=-1$



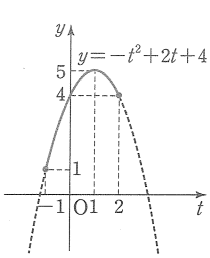
08-2 Action 0<(밑)<1이므로 주어진 함수는 진수가 최소일 때 최댓값을 가진다.

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+k$는 밑이 0과 1 사이의 수이므로 진수가 최소일 때 최댓값을 가진다.
즉 $-2\le x\le 1$에서 진수 $x+3$은 $x=-2$일 때 최소이고, 이때 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+k$는 최댓값 1을 가지므로
$1=\log_{\frac{1}{2}}(-2+3)+k$, $1=\log_{\frac{1}{2}}1+k$
$1=0+k$ $\therefore k=1$
또 진수는 $x=1$일 때 최대이고, 이때 함수
$y=\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+1$은 최솟값을 가진다.
따라서 구하는 최솟값은
$\log_{\frac{1}{2}}(1+3)+1=\log_{\frac{1}{2}}4+1=-2+1=-1$

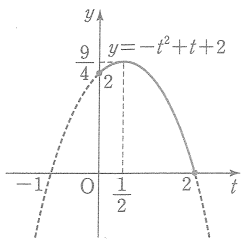
다른 풀이
$-2\le x\le 1$에서 $1\le x+3\le 4$이므로
$\log_{\frac{1}{2}}4\le\log_{\frac{1}{2}}(x+3)\le\log_{\frac{1}{2}}1$ $\therefore -2\le\log_{\frac{1}{2}}(x+3)\le 0$
즉 $k-2\le\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+k\le k$이고, 주어진 조건에서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+k$의 최댓값이 1이므로 $k=1$
따라서 구하는 최솟값은 $k-2=1-2=-1$

09-1 Action $\log_a x$를 t로 치환하고 t값의 범위를 구한다.

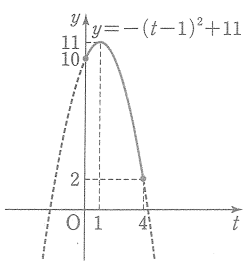
(1) $y=-(\log_3 x)^2+2\log_3 x+4$에서 $\log_3 x$를 t로 치환하면
$y=-t^2+2t+4=-(t-1)^2+5$
이때 $\frac{1}{3}\le x\le 9$에서
$\log_3\frac{1}{3}\le\log_3 x\le\log_3 9$
$\therefore -1\le t\le 2$
함수 $y=-(t-1)^2+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 함수의
최댓값은 $t=1$일 때 **5**,
최솟값은 $t=-1$일 때 **1**이다.



(2) $y=(\log_5 5x)\left(\log_5\frac{25}{x}\right)$
$=(\log_5 5+\log_5 x)(\log_5 25-\log_5 x)$
$=(1+\log_5 x)(2-\log_5 x)$
이 식에서 $\log_5 x$를 t로 치환하면
$y=(1+t)(2-t)=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$
이때 $1\le x\le 25$에서
$\log_5 1\le\log_5 x\le\log_5 25$
$\therefore 0\le t\le 2$
함수 $y=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 함수의
최댓값은 $t=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{9}{4}$,
최솟값은 $t=2$일 때 **0**이다.

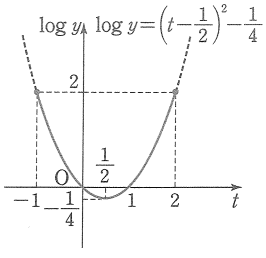


(3) $y=(\log_3 x)(\log_{\frac{1}{3}}x)+2\log_3 x+10$
$=(\log_3 x)(-\log_3 x)+2\log_3 x+10$
$=-(\log_3 x)^2+2\log_3 x+10$
이 식에서 $\log_3 x$를 t로 치환하면
$y=-t^2+2t+10=-(t-1)^2+11$
이때 $1\le x\le 81$에서
$\log_3 1\le\log_3 x\le\log_3 81$
$\therefore 0\le t\le 4$
함수 $y=-(t-1)^2+11$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 함수의
최댓값은 $t=1$일 때 **11**,
최솟값은 $t=4$일 때 **2**이다.



셀파 바로 확인 02 본문 139 쪽

(1) $y=x^{\log x-1}$의 양변에 상용로그를 취하면
$\log y=\log x^{\log x-1}=(\log x-1)\log x$
$=(\log x)^2-\log x$
이 식에서 $\log x$를 t로 치환하면
$\log y=t^2-t=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$
이때 $\frac{1}{10}\le x\le 100$에서
$\log\frac{1}{10}\le\log x\le\log 100$
$\therefore -1\le t\le 2$



$\log y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$의 그래프에서 $\log y$의 최댓값은 $t=-1$ 또는 $t=2$일 때 2, 최솟값은 $t=\frac{1}{2}$일 때 $-\frac{1}{4}$이다.

따라서 y의 최댓값은 $\log y=2$에서 10^2, 즉 **100**,

최솟값은 $\log y=-\frac{1}{4}$에서 $10^{-\frac{1}{4}}$, 즉 $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$이다.

(2) 두 수 x, y가 모두 양수이고, $x+y=18$이므로

(산술평균)≥(기하평균)으로부터

$\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}=\frac{18}{2}=9$

$\therefore xy\le 81$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

이때 로그의 성질에 의하여 ← 밑이 0과 1 사이의 수이므로 xy가 최대일 때 $\log_{\frac{1}{3}}xy$의 값은 최소이다.

$\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}y=\log_{\frac{1}{3}}xy\ge\log_{\frac{1}{3}}81=-4$

따라서 $\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}y$의 최솟값은 -4이다.

LECTURE **(산술평균)≥(기하평균)의 활용**

합 또는 곱이 일정한 경우의 최대 · 최소를 구할 때는 산술평균과 기하평균의 관계를 활용한다. 즉 $x>0$, $y>0$일 때 $x+y\ge2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)인 관계를 이용하면 $x+y$의 값을 알 때 xy의 최댓값을 구할 수 있고, xy의 값을 알 때 $x+y$의 최솟값을 구할 수 있다.

개념 강화 드릴 ② 본문 141 쪽

01 (1) $\log_x 4=2$에서 로그의 정의로부터

$x^2=4$ $\therefore x=\pm2$

이때 밑의 조건에서 $x>0$이므로 구하는 해는 $\boldsymbol{x=2}$

(2) $\log_3(x+1)=2$에서 로그의 정의로부터

$x+1=3^2$, $x+1=9$ $\therefore \boldsymbol{x=8}$

(3) $\log_{\frac{1}{4}}(1-x)=3$에서 로그의 정의로부터

$1-x=\left(\frac{1}{4}\right)^3$, $1-x=\frac{1}{64}$ $\therefore \boldsymbol{x=\frac{63}{64}}$

(4) $\log_4(2x-1)=\frac{1}{2}$에서 로그의 정의로부터

$2x-1=4^{\frac{1}{2}}$, $2x-1=2$ $\therefore \boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$

02 (1) (진수)>0에서 $x>0$, $x+1>0$이므로 $x>0$

$\log_2 x+\log_2(x+1)=\log_2 2$에서 $\log_2 x(x+1)=\log_2 2$

양변의 밑이 같으므로

$x(x+1)=2$, $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

이때 진수 조건에서 $x>0$이므로 구하는 해는 $\boldsymbol{x=1}$

(2) (진수)>0에서 $x>0$, $x-3>0$이므로 $x>3$

$\log_{\frac{1}{10}}x+\log_{\frac{1}{10}}(x-3)=-1$에서

$\log_{\frac{1}{10}}x(x-3)=\log_{\frac{1}{10}}10$

양변의 밑이 같으므로

$x(x-3)=10$, $x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=5$

이때 진수 조건에서 $x>3$이므로 구하는 해는 $\boldsymbol{x=5}$

(3) (진수)>0에서 $x^2-2>0$, $x>0$이므로 $x>\sqrt{2}$ ← $x<-\sqrt{2}$ 또는 $x>\sqrt{2}$

방정식 $\log_x(x^2-2)=\log_x x$의 밑이 같으므로

$x^2-2=x$, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때 밑의 조건에서 $x>0$, $x\ne1$이고

진수 조건에서 $x>\sqrt{2}$이므로 구하는 해는 $\boldsymbol{x=2}$

03 (1) (진수)>0에서 $x>0$, $x+2>0$이므로 $x>0$

$\log_3 x=\log_9(x+2)$에서 $\log_3 x=\log_9 x^2$이므로

$\log_9 x^2=\log_9(x+2)$

양변의 밑이 같으므로

$x^2=x+2$, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때 진수 조건에서 $x>0$이므로 구하는 해는 $\boldsymbol{x=2}$

(2) (진수)>0에서 $2x+15>0$, $x>0$이므로 $x>0$

$\log_{\frac{1}{9}}(2x+15)=\log_{\frac{1}{3}}x$에서 $\log_{\frac{1}{3}}x=\log_{\frac{1}{9}}x^2$이므로

$\log_{\frac{1}{9}}(2x+15)=\log_{\frac{1}{9}}x^2$

양변의 밑이 같으므로

$2x+15=x^2$, $x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

이때 진수 조건에서 $x>0$이므로 구하는 해는 $\boldsymbol{x=5}$

(3) (진수)>0에서 $2-x>0$, $4-3x>0$이므로 $x<\frac{4}{3}$

$\log_{\sqrt{2}}(2-x)=\log_2(4-3x)$에서

$\log_{\sqrt{2}}(2-x)=\log_2(2-x)^2$이므로

$\log_2(2-x)^2=\log_2(4-3x)$

양변의 밑이 같으므로

$(2-x)^2=4-3x$, $4-4x+x^2=4-3x$

$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때 진수 조건에서 $x<\frac{4}{3}$이므로 구하는 해는

$\boldsymbol{x=0}$ 또는 $\boldsymbol{x=1}$

04 (1) (진수)>0에서 $x>0$

$(\log_3 x)^2-2\log_3 x=0$에서 $\log_3 x$를 t로 치환하면

$t^2-2t=0$, $t(t-2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=2$

$t=0$일 때 $\log_3 x=0$에서 $x=3^0=1$

$t=2$일 때 $\log_3 x=2$에서 $x=3^2=9$

이때 진수 조건에서 $x>0$이므로 구하는 해는

$\boldsymbol{x=1}$ 또는 $\boldsymbol{x=9}$

(2) (진수)>0에서 $x>0$, $x^2>0$이므로 $x>0$

$(\log_5 x)^2=\log_5 x^2+3$에서 $(\log_5 x)^2-2\log_5 x-3=0$

$\log_5 x$를 t로 치환하면 $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

$t=-1$일 때 $\log_5 x=-1$에서 $x=5^{-1}=\frac{1}{5}$

$t=3$일 때 $\log_5 x=3$에서 $x=5^3=125$

이때 진수 조건에서 $x>0$이므로 구하는 해는

$\boldsymbol{x=\frac{1}{5}}$ 또는 $\boldsymbol{x=125}$

(3) (진수)>0에서 $x>0$이고, 밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq 1$이므로 $0<x<1$ 또는 $x>1$

$\log_2 x-4\log_x 2=0$에서 $\log_2 x-\frac{4}{\log_2 x}=0$

$\log_2 x$를 t로 치환하면 $t-\frac{4}{t}=0$, $t^2-4=0$

$(t+2)(t-2)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

$t=-2$일 때 $\log_2 x=-2$에서 $x=2^{-2}=\frac{1}{4}$

$t=2$일 때 $\log_2 x=2$에서 $x=2^2=4$

이때 진수와 밑의 조건에서 $0<x<1$또는 $x>1$이므로

구하는 해는 $\boldsymbol{x=\frac{1}{4}}$ 또는 $\boldsymbol{x=4}$

05

로그부등식	밑의 크기	(밑)□1	부등식의 해
❶ $\log_2 x<\log_2 y$	2	>	$x<y$
❷ $\log_3 x\geq\log_3 y$	3	>	$x\geq y$
❸ $\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}} y$	$\frac{1}{2}$	<	$x>y$
❹ $\log_{\frac{1}{3}} x\geq\log_{\frac{1}{3}} y$	$\frac{1}{3}$	<	$x\leq y$

❶ (밑)>1이므로 부등호의 방향은 그대로이다.

$\log_2 x<\log_2 y$ $\therefore x<y$

❷ (밑)>1이므로 부등호의 방향은 그대로이다.

$\log_3 x\geq\log_3 y$ $\therefore x\geq y$

❸ 0<(밑)<1이므로 부등호의 방향이 반대로 바뀐다.

$\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}} y$ $\therefore x>y$

❹ 0<(밑)<1이므로 부등호의 방향이 반대로 바뀐다.

$\log_{\frac{1}{3}} x\geq\log_{\frac{1}{3}} y$ $\therefore x\leq y$

06 (진수)>0에서 $x+2>0$, $3-x>0$이므로

$\boldsymbol{-2<x<3}$ ····· ㉠

$\log_2(x+2)>\log_2(3-x)$에서 밑이 1보다 크므로

$x+2>3-x$, $2x>1$ $\therefore x>\frac{1}{2}$ ····· ㉡

㉠과 ㉡을 모두 만족시키는 x값의 범위는

$\boldsymbol{\frac{1}{2}<x<3}$

07 (1) (진수)>0에서 $x>0$ ····· ㉠

$\log_2 x<1$에서 $1=\log_2 2$이므로 $\log_2 x<\log_2 2$

로그의 밑 2가 1보다 크므로 $x<2$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boldsymbol{0<x<2}$

(2) (진수)>0에서 $x+1>0$ $\therefore x>-1$ ····· ㉠

$\log_3(x+1)<-2$에서 $-2=\log_3 3^{-2}=\log_3\frac{1}{9}$이므로

$\log_3(x+1)<\log_3\frac{1}{9}$

로그의 밑 3이 1보다 크므로 $x+1<\frac{1}{9}$

$\therefore x<-\frac{8}{9}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boldsymbol{-1<x<-\frac{8}{9}}$

(3) (진수)>0에서 $x+2>0$, $3-x>0$

$\therefore -2<x<3$ ····· ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)>\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$에서 로그의 밑 $\frac{1}{2}$이 0과 1 사이의 값이므로

$x+2<3-x$, $2x<1$ $\therefore x<\frac{1}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boldsymbol{-2<x<\frac{1}{2}}$

(4) (진수)>0에서 $x^2-2>0$, $x>0$ $\therefore x>\sqrt{2}$ ····· ㉠ ($x<-\sqrt{2}$ 또는 $x>\sqrt{2}$)

$\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2)\geq\log_{\frac{1}{4}}x$에서 로그의 밑 $\frac{1}{4}$이 0과 1 사이의 값이므로 $x^2-2\leq x$, $x^2-x-2\leq 0$

$(x+1)(x-2)\leq 0$ $\therefore -1\leq x\leq 2$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boldsymbol{\sqrt{2}<x\leq 2}$

오답 피하기

(1)에서 진수의 조건을 확인하지 않고 해를 '$x<2$로 구하면 안 된다. 왜냐하면 $x\leq 0$일 때, 예를 들어 $x=-1$이라면 $\log_2(-1)$은 정의되지 않기 때문이다. 마찬가지로 (2)에서도 $x\leq -1$일 때 로그가 정의되지 않는다.

따라서 로그방정식 또는 로그부등식의 해를 구하는 문제에서는 밑과 진수의 조건을 만족시키는지 먼저 확인하도록 한다.

확인 문제 본문 142~150쪽

10-1 Action $2=\log_3 3^2=\log_3 9$를 이용한다.

(1) (진수)>0에서 $x+4>0$, $x-4>0$이므로 $x>4$

$\log_3(x+4)+\log_3(x-4)=2$에서

$\log_3(x+4)+\log_3(x-4)=\log_3(x+4)(x-4)$,

$2=\log_3 3^2=\log_3 9$이므로

$\log_3(x+4)(x-4)=\log_3 9$

$(x+4)(x-4)=9$, $x^2-16=9$

$x^2-25=0$, $(x+5)(x-5)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=5$

이때 진수 조건에서 $x>4$이므로 구하는 해는 $\boldsymbol{x=5}$

(2) (진수)>0에서 $x+12>0$, $x>0$, $x+2>0$이므로 $x>0$

$\log(x+12)-\log x=\log(x+2)$에서

$\log(x+12)=\log x+\log(x+2)$

$\log(x+12)=\log x(x+2)$

$x+12=x(x+2)$, $x+12=x^2+2x$

$x^2+x-12=0$, $(x+4)(x-3)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=3$

이때 진수 조건에서 $x>0$이므로 구하는 해는 $\boldsymbol{x=3}$

10-2 Action 밑이 다를 때에는 먼저 밑을 통일한다.

(1) (진수)>0에서 $x-2>0$, $2x-1>0$이므로 $x>2$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\log_{\frac{1}{4}}(2x-1)$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\log_{(\frac{1}{2})^2}(x-2)^2=\log_{\frac{1}{4}}(x-2)^2$이므로

$\log_{\frac{1}{4}}(x-2)^2=\log_{\frac{1}{4}}(2x-1)$

$(x-2)^2=2x-1$, $x^2-4x+4=2x-1$

$x^2-6x+5=0$, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

이때 진수 조건에서 $x>2$이므로 구하는 해는 $\boldsymbol{x=5}$

(2) (진수)>0에서 $x-3>0$, $x+7>0$이므로 $x>3$

$\log_3(x-3)=\log_9(x+7)+1$에서

$\log_3(x-3)=\log_{3^2}(x-3)^2=\log_9(x-3)^2$,

$1=\log_9 9$이므로

$\log_9(x-3)^2=\log_9(x+7)+\log_9 9$

$\log_9(x-3)^2=\log_9 9(x+7)$

$(x-3)^2=9(x+7)$, $x^2-6x+9=9x+63$

$x^2-15x-54=0$, $(x+3)(x-18)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=18$

이때 진수 조건에서 $x>3$이므로 구하는 해는 $\boldsymbol{x=18}$

11-1 Action 반복해서 나타나는 부분을 t로 치환한다.

(1) (진수)>0에서 $2x>0$, $\frac{x}{2}>0$이므로 $x>0$

$(\log_2 2x)\left(\log_2\frac{x}{2}\right)=3$에서

$(\log_2 2+\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 2)=3$

$(1+\log_2 x)(\log_2 x-1)=3$

이때 $\log_2 x$를 t로 치환하면

$(1+t)(t-1)=3$, $t^2-1=3$

$t^2-4=0$, $(t+2)(t-2)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

$t=-2$일 때 $\log_2 x=-2$에서 $x=2^{-2}=\frac{1}{4}$

$t=2$일 때 $\log_2 x=2$에서 $x=2^2=4$

이때 진수 조건에서 $x>0$이므로 구하는 해는

$\boldsymbol{x=\frac{1}{4}}$ 또는 $\boldsymbol{x=4}$

(2) (진수)>0에서 $x>0$

$x^{\log 2}\cdot 2^{\log x}-6(x^{\log 2}+2^{\log x})+32=0$에서

$x^{\log 2}=2^{\log x}$이므로 $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

$2^{\log x}\cdot 2^{\log x}-6(2^{\log x}+2^{\log x})+32=0$

이때 $2^{\log x}$을 t로 치환하면

$t^2-12t+32=0$, $(t-4)(t-8)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=8$

$t=4$일 때 $2^{\log x}=4=2^2$에서

$\log x=2$ $\therefore x=10^2=100$

$t=8$일 때 $2^{\log x}=8=2^3$에서

$\log x=3$ $\therefore x=10^3=1000$

이때 진수 조건에서 $x>0$이므로 구하는 해는

$\boldsymbol{x=100}$ 또는 $\boldsymbol{x=1000}$

11-2 Action 로그의 성질과 근과 계수의 관계를 이용한다.

$(\log_2 x)^2+\log_{\frac{1}{2}}x^3-10=0$에서

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x-10=0$ …… ㉠

이때 $\log_2 x$를 t로 치환하면

$t^2-3t-10=0$ …… ㉡

방정식 ㉠의 두 근이 α, β이므로 방정식 ㉡의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이고, ㉡에서 근과 계수의 관계로부터

$\log_2\alpha+\log_2\beta=3$, $\log_2\alpha\cdot\log_2\beta=-10$

$$\therefore \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\frac{\log_2\beta}{\log_2\alpha}+\frac{\log_2\alpha}{\log_2\beta}$$

$$=\frac{(\log_2\beta)^2+(\log_2\alpha)^2}{\log_2\alpha\cdot\log_2\beta}$$

$$=\frac{(\log_2\beta+\log_2\alpha)^2-2\log_2\beta\cdot\log_2\alpha}{\log_2\alpha\cdot\log_2\beta}$$

$$=\frac{3^2-2\times(-10)}{-10}=\boldsymbol{-\frac{29}{10}}$$

다른 풀이

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x-10=0$에서 $\log_2 x$를 t로 치환하면

$t^2-3t-10=0$, $(t+2)(t-5)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=5$

$t=-2$일 때, $\log_2 x=-2$에서 $x=2^{-2}$

$t=5$일 때, $\log_2 x=5$에서 $x=2^5$

이때 $\alpha=2^{-2}$, $b=2^5$이라 하면

$\log_\alpha \beta+\log_\beta \alpha=\log_{2^{-2}} 2^5+\log_{2^5} 2^{-2}$

$=-\frac{5}{2}+\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{29}{10}$

셀파 특강 **확인 03** 본문 144 쪽

(1) $\log_2 x-\log_4 x=2\log_2 x\cdot\log_4 x$에서

$\log_4 x=\log_{2^2} x=\frac{1}{2}\log_2 x$이므로 주어진 방정식은

$\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2 x=2\log_2 x\cdot\frac{1}{2}\log_2 x$

이때 $\log_2 x$를 t로 치환하면 $t-\frac{1}{2}t=2t\times\frac{1}{2}t$, $\frac{1}{2}t=t^2$

$\therefore 2t^2-t=0$ ····· ㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이다. 이때 근과 계수의 관계로부터

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=\frac{1}{2}$, $\log_2 \alpha\beta=\frac{1}{2}$ $\therefore \alpha\beta=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

(2) $(\log_{\frac{1}{2}} x)^2+k\log_{\frac{1}{2}} x-1=0$에서 $\log_{\frac{1}{2}} x$를 t로 치환하면

$t^2+kt-1=0$ ····· ㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라고 하면

방정식 ㉠의 두 근은 $\log_{\frac{1}{2}} \alpha$, $\log_{\frac{1}{2}} \beta$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} \alpha+\log_{\frac{1}{2}} \beta=-k$ $\therefore \log_{\frac{1}{2}} \alpha\beta=-k$

이때 로그의 정의로부터 $\alpha\beta=\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}=2^k$이고,

주어진 조건에서 $\alpha\beta=4$이므로 $2^k=4=2^2$ $\therefore k=2$

12-1 Action 지수에 로그가 있으면 양변에 로그를 취한다.

(1) $x^{1-\log x}=\frac{x^2}{100}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{1-\log x}=\log\frac{x^2}{100}$

$(1-\log x)\log x=2\log x-\log 100$

$\therefore (\log x)^2+\log x-2=0$

이때 $\log x$를 t로 치환하면

$t^2+t-2=0$, $(t+2)(t-1)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

$t=-2$일 때, $\log x=-2$에서 $x=10^{-2}=\frac{1}{100}$

$t=1$일 때, $\log x=1$에서 $x=10^1=10$

이때 진수 조건에서 $x>0$이므로 구하는 해는

$x=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$

(2) $x^{\log_3 x}=9x$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 9x$

$\log_3 x\cdot\log_3 x=\log_3 9+\log_3 x$

$\therefore (\log_3 x)^2-\log_3 x-2=0$

이때 $\log_3 x$를 t로 치환하면

$t^2-t-2=0$, $(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

$t=-1$일 때, $\log_3 x=-1$에서 $x=3^{-1}=\frac{1}{3}$

$t=2$일 때, $\log_3 x=2$에서 $x=3^2=9$

이때 진수 조건에서 $x>0$이므로 구하는 해는

$x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=9$

12-2 Action 양변에 밑이 2인 로그를 취하고 $\log_2 x$를 t로 치환한다.

$x^{3\log_2 x}=\frac{16}{x^4}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{3\log_2 x}=\log_2\frac{16}{x^4}$, $3\log_2 x\cdot\log_2 x=\log_2 16-\log_2 x^4$

$\therefore 3(\log_2 x)^2+4\log_2 x-4=0$

이때 $\log_2 x$를 t로 치환하면

$3t^2+4t-4=0$, $(t+2)(3t-2)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=\frac{2}{3}$

$t=-2$일 때, $\log_2 x=-2$에서 $x=2^{-2}=\frac{1}{4}$

$t=\frac{2}{3}$일 때, $\log_2 x=\frac{2}{3}$에서 $x=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$

이때 진수 조건에서 $x>0$이므로 구하는 해는

$x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=\sqrt[3]{4}$

LECTURE **치환한 변수 t값의 범위**

지수함수 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$의 치역은 $\{y|y>0$인 실수$\}$이므로 지수방정식에서 a^x을 t로 치환할 때 $t>0$이다.
그러나 로그함수 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$의 치역은 실수 전체의 집합이므로 로그방정식에서 $\log_a x$를 t로 치환할 때는 t값의 범위를 고려하지 않아도 된다.

셀파 특강 **확인 04** 본문 146 쪽

(1) $3^{2x+1}=15$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 3^{2x+1}=\log 15$, $(2x+1)\log 3=\log 3+\log 5$

$2x\log 3+\log 3=\log 3+\log 5$

$2x\log 3=\log 5$ $\therefore x=\frac{\log 5}{2\log 3}$

다른 풀이

$3^{2x+1}=15=3\times5$, $3\times3^{2x}=3\times5$에서 $3^{2x}=5$

$2x=\log_3 5$ $\therefore x=\frac{1}{2}\log_3 5$

(2) $25^x=2^{1-2x}$, 즉 $5^{2x}=2^{1-2x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 5^{2x}=\log 2^{1-2x}$, $2x\log 5=(1-2x)\log 2$

$2x\log 5=\log 2-2x\log 2$, $(2\log 5+2\log 2)x=\log 2$

$2(\underbrace{\log 5+\log 2}_{\log 10=1})x=\log 2$, $2x=\log 2$ $\therefore \boldsymbol{x=\frac{1}{2}\log 2}$

13-1 Action (밑)>1이면 진수에 대한 부등호 방향은 그대로, 0<(밑)<1이면 진수에 대한 부등호 방향은 반대로!

(1) (진수)>0에서 $x-1>0$, $4x-2>0$, $x+2>0$이므로

$x>1$ ····· ㉠

부등식 $\log_{\frac{1}{4}}(x-1)\geq\log_{\frac{1}{4}}(4x-2)-\log_{\frac{1}{4}}(x+2)$에서

$\log_{\frac{1}{4}}(x-1)+\log_{\frac{1}{4}}(x+2)\geq\log_{\frac{1}{4}}(4x-2)$

$\log_{\frac{1}{4}}(x-1)(x+2)\geq\log_{\frac{1}{4}}(4x-2)$

밑 $\frac{1}{4}$이 0과 1 사이의 수이므로

$(x-1)(x+2)\leq4x-2$, $x^2+x-2\leq4x-2$

$x^2-3x\leq0$, $x(x-3)\leq0$

$\therefore 0\leq x\leq3$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boldsymbol{1<x\leq3}$

(2) (진수)>0에서 $x>0$, $\underbrace{\log_{10}x>0}_{\log_{10}x>\log_{10}1\text{에서 }x>1}$이므로

$\therefore x>1$ ····· ㉡

부등식 $\log_{\frac{1}{10}}(\log_{10}x)\geq0$에서

$\log_{\frac{1}{10}}(\log_{10}x)\geq\log_{\frac{1}{10}}1$

밑 $\frac{1}{10}$이 0과 1 사이의 수이므로

$\log_{10}x\leq1$ $\therefore \log_{10}x\leq\log_{10}10$

밑 10이 1보다 크므로 $x\leq10$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boldsymbol{1<x\leq10}$

13-2 Action 먼저 밖에 있는 괄호부터 순서대로 식을 간단히 정리하여 부등식을 푼다.

(진수)>0에서 $x>0$, $\log_{\frac{1}{2}}x>0$, $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)>0$이어야 하는데 $\log_{\frac{1}{2}}x>0$에서 $\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{2}}1$이고, 이때 밑이 0과 1 사이의 수이므로 $x<1$

또 $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)>0$에서 $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)>\log_2 1$

이때 밑이 1보다 크므로 $\log_{\frac{1}{2}}x>1$, 즉 $\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$이고, 이때 밑이 0과 1 사이의 수이므로 $x<\frac{1}{2}$이다.

따라서 $x>0$, $x<1$, $x<\frac{1}{2}$의 공통 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{2}$ ····· ㉠

주어진 부등식 $\log_{\frac{1}{3}}\{\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)\}<0$에서

$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)\}<\log_{\frac{1}{3}}1$

밑 $\frac{1}{3}$이 0과 1 사이의 수이므로

$\log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)>1$ $\therefore \log_2(\log_{\frac{1}{2}}x)>\log_2 2$

밑 2가 1보다 크므로

$\log_{\frac{1}{2}}x>2$ $\therefore \log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

밑 $\frac{1}{2}$이 0과 1 사이의 수이므로

$x<\frac{1}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boldsymbol{0<x<\frac{1}{4}}$

14-1 Action $\log_a x$가 반복되면 $\log_a x$를 t로 치환한다.

(1) (진수)>0에서 $x>0$ ····· ㉠

$(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-\log_{\frac{1}{3}}x-12>0$에서 $\log_{\frac{1}{3}}x$를 t로 치환하면

$t^2-t-12>0$, $(t+3)(t-4)>0$

$\therefore t<-3$ 또는 $t>4$

$\log_{\frac{1}{3}}x<-3$에서 $\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}27$

밑 $\frac{1}{3}$이 0과 1 사이의 수이므로 $x>27$

$\log_{\frac{1}{3}}x>4$에서 $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{81}$

밑 $\frac{1}{3}$이 0과 1 사이의 수이므로 $x<\frac{1}{81}$

$\therefore x>27$ 또는 $x<\frac{1}{81}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boldsymbol{0<x<\frac{1}{81}}$ 또는 $\boldsymbol{x>27}$

(2) (진수)>0에서 $x>0$, $\frac{x}{4}>0$이므로 $x>0$ ····· ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}x\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{4}\leq3$에서

$\log_{\frac{1}{2}}x\left(\underbrace{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}_{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2=2}+\log_{\frac{1}{2}}x\right)-3\leq0$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}x\,(2+\log_{\frac{1}{2}}x)-3\leq0$

이 부등식에서 $\log_{\frac{1}{2}}x$를 t로 치환하면

$t(2+t)-3\leq0$, $t^2+2t-3\leq0$

$(t+3)(t-1)\leq0$ $\therefore -3\leq t\leq1$

즉 $-3\leq\log_{\frac{1}{2}}x\leq1$에서 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\leq\log_{\frac{1}{2}}x\leq\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

$(2^{-1})^{-3}=2^3$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 0과 1 사이의 수이므로 $\frac{1}{2}\leq x\leq8$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boldsymbol{\frac{1}{2}\leq x\leq8}$

14-2 Action 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 $a>0$, $D\leq 0$이어야 한다.

(진수)>0에서 $a>0$ ····· ㉠

이차부등식 $x^2-(\log_2 a)x+\log_2 a\geq 0$이 항상 성립하려면

$D=(\log_2 a)^2-4\log_2 a\leq 0$

이 부등식에서 $\log_2 a$를 t로 치환하면

$t^2-4t\leq 0$, $t(t-4)\leq 0$ $\therefore 0\leq t\leq 4$

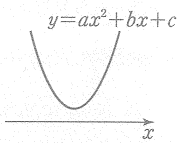
즉 $0\leq\log_2 a\leq 4$에서 $\log_2 2^0\leq\log_2 a\leq\log_2 2^4$

이때 밑 2가 1보다 크므로 $1\leq a\leq 16$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\mathbf{1\leq a\leq 16}$

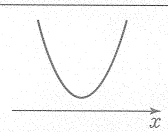
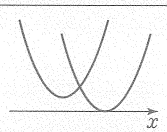
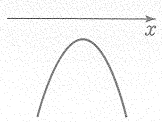
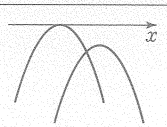
LECTURE 이차부등식이 항상 성립할 조건

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 x축보다 위쪽에 있어야 한다.



즉 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 아래로 볼록한 포물선($\cup$) 꼴이 되어야 하므로 $a>0$이고, $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나면 안 되므로 판별식 $D<0$이어야 한다. → 허근을 가진다.

$a\neq 0$일 때, 모든 실수 x에 대하여 다음 부등식이 성립할 조건은 위 내용과 같은 원리로 생각하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

(i) $ax^2+bx+c>0$	(ii) $ax^2+bx+c\geq 0$
	
$a>0$, $D<0$	$a>0$, $D\leq 0$
(iii) $ax^2+bx+c<0$	**(iii) $ax^2+bx+c\leq 0$**
	
$a<0$, $D<0$	$a<0$, $D\leq 0$

15-1 Action 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취한다.

$x^{3-\log_2 x}<(2x)^k$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{3-\log_2 x}<\log_2(2x)^k$

$(3-\log_2 x)\log_2 x<k\log_2 2x$

$(3-\log_2 x)\log_2 x<k(\log_2 2+\log_2 x)$

$3\log_2 x-(\log_2 x)^2<k+k\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2+(k-3)\log_2 x+k>0$ ····· ㉠

이때 $\log_2 x$를 t로 치환하면

$t^2+(k-3)t+k>0$ ····· ㉡

모든 양수 x에 대하여 부등식 ㉠이 항상 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 부등식 ㉡이 항상 성립해야 한다. 즉 부등식 ㉡서 $D<0$이어야 하므로

$D=(k-3)^2-4\times 1\times k<0$

$k^2-10k+9<0$, $(k-1)(k-9)<0$ $\therefore \mathbf{1<k<9}$

15-2 Action $a>1$일 때와 $0<a<1$일 때로 나누어 생각한다.

$2\log_a(x-4)\leq\log_a(x-2)$에서 (진수)$>0$이어야 하므로

$x-4>0$, $x-2>0$ $\therefore x>4$ ····· ㉠

주어진 부등식을 정리하면 $\log_a(x-4)^2\leq\log_a(x-2)$

(i) $a>1$일 때

$(x-4)^2\leq x-2$, $x^2-9x+18\leq 0$

$(x-3)(x-6)\leq 0$ $\therefore 3\leq x\leq 6$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $4<x\leq 6$

(ii) $0<a<1$일 때

$(x-4)^2\geq x-2$, $x^2-9x+18\geq 0$

$(x-3)(x-6)\geq 0$ $\therefore x\leq 3$ 또는 $x\geq 6$ ····· ㉢

㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면 $x\geq 6$

(i), (ii)로부터 $\mathbf{a>1}$일 때 $\mathbf{4<x\leq 6}$, $\mathbf{0<a<1}$일 때 $\mathbf{x\geq 6}$

16-1 Action $\log_x y$를 t로 치환하여 주어진 식을 변형한다.

$\log_x y\leq\log_y x$에서 x, y는 로그의 밑이므로 1이 아닌 양수이어야 한다.

이때 $\log_y x=\dfrac{1}{\log_x y}$이므로 $\log_x y$를 t로 치환하면 $t\leq\dfrac{1}{t}$에서

(i) $t>0$일 때

$t^2\leq 1$, $t^2-1\leq 0$ $\therefore -1\leq t\leq 1$

즉 $0<t\leq 1$이므로 $0<\log_x y\leq 1$에서

$\log_x 1<\log_x y\leq\log_x x$

따라서 $0<x<1$일 때는 $x\leq y<1$ ····· ㉠이고,

$x>1$일 때는 $1<y\leq x$ ····· ㉡이다.

(ii) $t<0$일 때

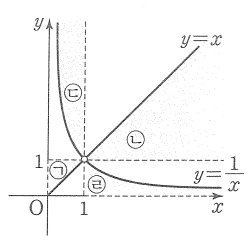
$t^2\geq 1$, $t^2-1\geq 0$ $\therefore t\leq -1$ 또는 $t\geq 1$

즉 $t\leq -1$이므로 $\log_x y\leq -1$에서 $\log_x y\leq\log_x\dfrac{1}{x}$

따라서 $0<x<1$일 때는 $y\geq\dfrac{1}{x}$ ····· ㉢이고,

$x>1$일 때는 $y\leq\dfrac{1}{x}$ ····· ㉣이다.

(i), (ii)로부터 부등식 $\log_x y\leq\log_y x$를 만족시키는 점 (x, y)의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림에서 색칠한 부분이다.



16-2 Action $[\log_2 x]^2+[\log_2 y]^2=2$를 만족시키는 각각의 경우를 따져본다.

x, y는 로그의 진수이므로 $x>0$, $y>0$

$[\log_2 x]$, $[\log_2 y]$는 정수이고, $[\log_2 x]^2+[\log_2 y]^2=2$에서 더해서 2가 되는 두 제곱수는 1과 1뿐이므로

$[\log_2 x]^2=1$, $[\log_2 y]^2=1$

(i) $[\log_2 x]=1$, $[\log_2 y]=1$일 때

$1\le\log_2 x<2$, $1\le\log_2 y<2$이므로

$2\le x<4$, $2\le y<4$ ····· ㉠

(ii) $[\log_2 x]=1$, $[\log_2 y]=-1$일 때

$1\le\log_2 x<2$, $-1\le\log_2 y<0$이므로

$2\le x<4$, $\frac{1}{2}\le y<1$ ····· ㉡

(iii) $[\log_2 x]=-1$, $[\log_2 y]=1$일 때

$-1\le\log_2 x<0$, $1\le\log_2 y<2$이므로

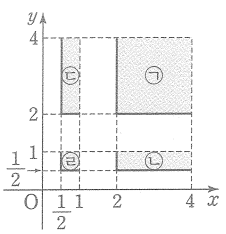
$\frac{1}{2}\le x<1$, $2\le y<4$ ····· ㉢

(iv) $[\log_2 x]=-1$, $[\log_2 y]=-1$일 때

$-1\le\log_2 x<0$, $-1\le\log_2 y<0$이므로

$\frac{1}{2}\le x<1$, $\frac{1}{2}\le y<1$ ····· ㉣

㉠~㉣을 만족시키는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림에서 색칠한 부분이므로 구하는 영역의 넓이 S는



$S=2\times2+2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{25}{4}$

기본강화 본문 151~153쪽

01 Action $\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)로 놓고 $\alpha=0$일 때와 $0<\alpha<1$일 때로 나누어 생각한다.

$\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)로 놓으면

(i) $\alpha=0$일 때, 즉 $\log x$가 정수일 때

$[\log x]=[n]=n$, $[-\log x]=[-n]=-n$

$\therefore f(x)=n-n=0$

(ii) $0<\alpha<1$일 때, 즉 $\log x$가 정수가 아닐 때

$[\log x]=[n+\alpha]=n$, $[-\log x]=[-n-\alpha]=-n-1$

$\therefore f(x)=n-n-1=-1$

따라서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{-1, 0\}$이다.

02 Action $\log_9 x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)로 놓고 $\alpha=0$일 때와 $0<\alpha<1$일 때로 나누어 생각한다.

$\log_9 x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)로 놓으면

(i) $\alpha=0$일 때, 즉 $\log_9 x=n$일 때

$f(x)=\log_9 x-[\log_9 x]=n-[n]=n-n=0$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_9\frac{1}{x}-\left[\log_9\frac{1}{x}\right]=-\log_9 x-[-\log_9 x]$

$=-n-(-n)=0$

따라서 정수 n에 대하여 $\log_9 x=n$일 때는 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$이 성립한다. 즉 $x=9^n$ ($n=0, 1, 2, \cdots$)이고, 이때 x가 100 이하의 자연수이므로 $x=1, 9, 81$

(ii) $0<\alpha<1$일 때, 즉 $\log_9 x=n+\alpha$일 때

$f(x)=\log_9 x-[\log_9 x]=n+\alpha-n=\alpha$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_9\frac{1}{x}-\left[\log_9\frac{1}{x}\right]=-\log_9 x-[-\log_9 x]$

$=-(n+\alpha)-(-n-1)=1-\alpha$

$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$에서 $\alpha=1-\alpha$ $\therefore \alpha=\frac{1}{2}$

따라서 $\log_9 x=n+\frac{1}{2}$에서

$x=9^{n+\frac{1}{2}}=3\times9^n$ ($n=0, 1, 2, \cdots$)이고, 이때 x가 100 이하의 자연수이므로 $x=3, 27$

(i), (ii)로부터 $x=1, 3, 9, 27, 81$

평가원 기출

03 Action $(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$(g\circ f)(x)=x$이므로 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 $g(13)=k$라 하면 $f(k)=13$이고,

이때 $f(x)=1+3\log_2 x$이므로

$1+3\log_2 k=13$, $3\log_2 k=12$, $\log_2 k=4$

$\therefore k=2^4=16$

즉 $g(13)=16$

평가원 기출

04 Action $y=\log_2 x$를 x축 방향으로 a만큼 평행이동시킨 그래프는 $y=\log_2(x-a)$

함수 $y=\log_2 x$를 x축 방향으로 a만큼 평행이동시킨 그래프는 $y=\log_2(x-a)$

따라서 점 $(9, 2)$가 곡선 $y=\log_2(x-a)$ 위의 점이므로

$2=\log_2(9-a)$, $9-a=4$ $\therefore a=5$

또 점 $(9, 2)$는 곡선 $y=\log_b x$ 위의 점이기도 하므로

$2=\log_b 9$, $b^2=9$ $\therefore b=\pm3$

그런데 밑 조건에 의하여 $b>0$, $b\ne1$이므로 $b=3$

$\therefore 10a+b=10\times5+3=53$

05 Action 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3, 6)$을 지나므로 역함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-p)+q$의 그래프는 점 $(6, 3)$을 지난다.

즉 $3=\log_{\frac{1}{2}}(6-p)+q$이므로

$3=-\log_2(6-p)+q$ ····· ㉠

또 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(3, 6)$을 지나므로 역함수 $y=\log_2(x-p)+q$의 그래프는 점 $(6, 3)$을 지난다.

$\therefore 3=\log_2(6-p)+q$ ····· ㉡

㉡−㉠에서 $2\log_2(6-p)=0$이므로 $6-p=1$ $\therefore p=5$

$p=5$를 ㉠에 대입하면 $q=3$

06 Action $\log_a x$에서 $0<a<1$이므로 x의 값이 커지면 $\log_a x$의 값은 작아진다.

$f(x)=\log_a x$는 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 커질수록 $f(x)$의 값은 작아진다.

이때 $0<a<1<b$에서 $\frac{b}{a}>b>a$이므로

$f\left(\frac{b}{a}\right)<f(b)<f(a)$

$\therefore C<B<A$

다른 풀이

$f(x)=\log_a x$에서

$A=f(a)=\log_a a=1$

$B=f(b)=\log_a b<0$ ($\because a<1<b$)

$C=f\left(\frac{b}{a}\right)=\log_a\frac{b}{a}=\log_a b-\log_a a=B-1$

$\therefore C<B<A$

07 Action $y=\log_a f(x)$에서 $a>1$이면 진수 $f(x)$가 최대일 때 y는 최대가 된다.

(진수)>0에서 $x>0$, $64-x>0$이므로 $0<x<64$

$y=\log_4 x+\log_4(64-x)$

$=\log_4 x(64-x)$

$=\log_4(-x^2+64x)$

에서 로그의 밑 4가 1보다 크므로 y는 진수가 최대일 때 최댓값을 가진다. 이때 $f(x)=-x^2+64x$라고 하면

$f(x)=-(x-32)^2+1024\le 1024$이므로

$f(x)$는 $x=32$일 때 최댓값 1024를 가진다.

따라서 함수 $y=\log_4 x+\log_4(64-x)$, 즉 $y=\log_4(-x^2+64x)$의 최댓값은 $\log_4 1024=\log_{2^2}2^{10}=5$

즉 $t=32$, $M=5$이므로

$tM=32\times 5=\mathbf{160}$

08 Action 주어진 방정식을 간단히 정리하여 y에 대한 식을 구한다.

$x>1$, $y>1$일 때 $\log_x y>0$이므로

$2\log_x y-3\log_y x+5=0$에서

$2\log_x y-3\times\frac{1}{\log_x y}+5=0$, $2(\log_x y)^2+5\log_x y-3=0$

$\therefore (2\log_x y-1)(\log_x y+3)=0$

이때 $\log_x y+3>0$이므로

$2\log_x y-1=0$, $\log_x y=\frac{1}{2}$ $\therefore y=\sqrt{x}$

$\therefore x^2-4y^2+7=x^2-4(\sqrt{x})^2+7=x^2-4x+7$

$=(x-2)^2+3$

따라서 x^2-4y^2+7의 최솟값은 **3**이다.

교육청 기출

09 Action 주어진 식을 정리한 후 $\log_3 x$를 X로, $\log_3 y$를 Y로 치환한다.

$(\log_3 x)^2+(\log_3 y)^2=\log_9 x^2+\log_9 y^2$에서

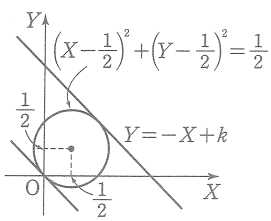
$\log_9 x^2=\log_{3^2}x^2=\log_3 x$, $\log_9 y^2=\log_{3^2}y^2=\log_3 y$이므로

$(\log_3 x)^2+(\log_3 y)^2=\log_3 x+\log_3 y$

이때 $\log_3 x$를 X로, $\log_3 y$를 Y로 치환하면

$X^2+Y^2=X+Y$ $\therefore \left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ ····· ㉠

또한 $\log_3 xy=\log_3 x+\log_3 y=X+Y$이고, 이때 $X+Y=k$ ····· ㉡으로 놓으면 오른쪽 그림과 같이 직선 $Y=-X+k$가 원 ㉠에 접할 때 k는 최댓값과 최솟값을 가진다. 즉 원의 중심 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서 직선 ㉡까지의 거리가 원 ㉠의 반지름의 길이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$과 같을 때 최댓값과 최솟값을 가지므로



$\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-k\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $|1-k|=1$ $\therefore k=0$ 또는 $k=2$

따라서 $\log_3 xy$의 최댓값은 2, $\log_3 xy$의 최솟값은 0이므로

$M=3^2=9$, $m=3^0=1$ $\therefore M+m=\mathbf{10}$

10 Action $3^{\frac{x^2+9}{x}}$이 최솟값을 가질 때를 찾는다.

함수 $y=\log 3^{\frac{x^2+9}{x}}$은 $3^{\frac{x^2+9}{x}}$이 최솟값을 가질 때 최솟값을 가지고, $3^{\frac{x^2+9}{x}}$은 $\frac{x^2+9}{x}$가 최솟값을 가질 때 최솟값을 가진다.

이때 $x>0$이므로 (산술평균)$\ge$(기하평균)으로부터

$\frac{x^2+9}{x}=x+\frac{9}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}=2\cdot 3=6$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{9}{x}\text{일 때, 즉 } x=3\text{일 때 성립}\right)$

즉 $\frac{x^2+9}{x}$는 $x=3$일 때 최솟값 6을 가지므로 $3^{\frac{x^2+9}{x}}$은 $x=3$일 때 최솟값 3^6을 가진다.

따라서 함수 $y=\log 3^{\frac{x^2+9}{x}}$은 $x=3$일 때 최솟값 $\log 3^6$을 가지므로 $a=3$, $b=\log 3^6$

$\therefore \log_a 10^b=\log_3 10^{\log 3^6}=\log_3 3^6=\mathbf{6}$

11 Action 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

(진수)>0에서 $\cos\theta>0$, $\sin\theta>0$

$\therefore 0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ····· ㉠

$\log(\cos\theta)-\log(\sin\theta)=-\frac{1}{2}\log 3$에서

$\log(\sin\theta)-\log(\cos\theta)=\frac{1}{2}\log 3$

$\log\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\log 3$, $\log(\tan\theta)=\log\sqrt{3}$

밑이 같으므로 $\tan\theta=\sqrt{3}$ ····· ㉡

㉠의 범위에서 ㉡을 만족시키는 θ의 값은 $\theta=\mathbf{\frac{\pi}{3}}$

12 Action $\log_3 x=n+\alpha$로 놓는다.

$\log_3 x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)로 놓으면

$[\log_3 x]=n$이므로 $[\log_3 x]+\log_3 x=\frac{9}{2}$에서

$n+n+\alpha=\frac{9}{2}$, $2n+\alpha=4+\frac{1}{2}$ $\therefore n=2$, $\alpha=\frac{1}{2}$

즉 $\log_3 x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$이므로

$x=3^{\frac{5}{2}}=3^{2+\frac{1}{2}}=3^2\cdot 3^{\frac{1}{2}}=\mathbf{9\sqrt{3}}$

13 Action $\overline{AB}=\log_3 k-\log_9 k$,
$\overline{CD}=\log_3(k+1)-\log_9(k+1)$

$\overline{AB}=\log_3 k-\log_9 k=\log_3 k-\frac{1}{2}\log_3 k=\frac{1}{2}\log_3 k$

$\log_9 k=\log_{3^2} k=\frac{1}{2}\log_3 k$

$\overline{CD}=\log_3(k+1)-\log_9(k+1)$

$=\log_3(k+1)-\frac{1}{2}\log_3(k+1)=\frac{1}{2}\log_3(k+1)$

이때 $\overline{AB}:\overline{CD}=1:2$에서 $\overline{CD}=2\overline{AB}$이므로

$\frac{1}{2}\log_3(k+1)=2\times\frac{1}{2}\log_3 k$, $\log_3(k+1)=2\log_3 k$

$\log_3(k+1)=\log_3 k^2$, $k+1=k^2$ 밑이 같으므로

$k^2-k-1=0$ $\therefore k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $k>1$이므로 $k=\mathbf{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

14 Action $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가질 조건은 $D=b^2-4ac=0$

주어진 이차방정식 $(\log k^5+6)x^2-2(\log k+2)x+1=0$이 중근을 가지므로 $\frac{D}{4}=(\log k+2)^2-(\log k^5+6)=0$에서

$(\log k)^2+4\log k+4-5\log k-6=0$

$\therefore (\log k)^2-\log k-2=0$

이때 $\log k$를 t로 치환하면 $t^2-t-2=0$이므로

$(t+1)(t-2)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

$t=-1$일 때, $\log k=-1$에서 $k=10^{-1}=\frac{1}{10}$

$t=2$일 때, $\log k=2$에서 $k=10^2=100$

$k=\frac{1}{10}$ 또는 $k=100$은 진수 조건 $k>0$을 만족시키므로 구하는 k의 값은 $\mathbf{\frac{1}{10}}$ 또는 **100**

15 Action $\log_2 x$를 X로, $\log_2 y$를 Y로 치환한다.

연립방정식 $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=2\\ \log_2 x\cdot\log_2 y=-3\end{cases}$ 에서

$\log_2 x$를 X로, $\log_2 y$를 Y로 치환하면

$X+Y=2$ ····· ㉠, $XY=-3$ ····· ㉡

㉠에서 $Y=-X+2$이고, 이 식을 ㉡에 대입하면

$X(-X+2)=-3$, $X^2-2X-3=0$

$(X+1)(X-3)=0$ $\therefore X=-1$ 또는 $X=3$

이 값을 ㉡에 대입하면 $\begin{cases}X=-1\\ Y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}X=3\\ Y=-1\end{cases}$

즉 $\begin{cases}\log_2 x=-1\\ \log_2 y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\log_2 x=3\\ \log_2 y=-1\end{cases}$ 이므로

$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$

수능 기출

16 Action $\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3a+b}{3}=k(k\neq 0)$로 놓는다.

$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3a+b}{3}=k(k\neq 0)$라고 하면

$3a=k\cdot\log_a b$ ····· ㉠

$b=2k\cdot\log_b a$ ····· ㉡

$3a+b=3k$ ····· ㉢

㉠+㉡에서 $3a+b=k\log_a b+2k\log_b a$이므로 이 식을 ㉢에 대입하면 $k\log_a b+2k\log_b a=3k$, $\log_a b+2\log_b a=3$

$\therefore \log_a b+\frac{2}{\log_a b}-3=0$

이때 $\log_a b$를 t로 치환하면 $t+\frac{2}{t}-3=0$이므로

$t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=2$

그런데 $1<a<b$에서 $t=\log_a b>1$이므로 $t=\log_a b=2$

$\therefore 10\log_a b=10\times 2=\mathbf{20}$

평가원 기출

17 Action $\log_3 x$를 t로 치환하여 로그방정식을 푼다.

$\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)^2-20\log_9 x+26=0$에서

$(\log_3 x-\log_3 3)^2-20\log_{3^2} x+26=0$

$(\log_3 x-1)^2-10\log_3 x+26=0$ $\longrightarrow 20\cdot\frac{1}{2}\log_3 x=10\log_3 x$

이때 $\log_3 x$를 t로 치환하면

$(t-1)^2-10t+26=0$

$\therefore t^2-12t+27=0$ ····· ㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터

$\log_3\alpha+\log_3\beta=12$, $\log_3\alpha\beta=12$ $\therefore \alpha\beta=3^{12}$

다른 풀이

$(\log_3 x-1)^2-10\log_3 x+26=0$에서

$\log_3 x$를 t로 치환하면

$(t-1)^2-10t+26=0$, $t^2-12t+27=0$

$(t-3)(t-9)=0$ $\therefore t=3$ 또는 $t=9$

$t=3$일 때, $\log_3 x=3$에서 $x=3^3$

$t=9$일 때, $\log_3 x=9$에서 $x=3^9$

즉 $\alpha=3^3$, $\beta=3^9$ 또는 $\alpha=3^9$, $\beta=3^3$이므로

$\alpha\beta=3^3\cdot 3^9=3^{3+9}=3^{12}$

평가원 기출

18 Action 로그부등식에서는 진수 조건에 주의한다.

(진수)>0에서 $x-3>0$, $x+1>0$이므로 $x>3$ ····· ㉠

부등식 $\log_3(x-3)+\log_3(x+1)<1+\log_3 4$에서

$\log_3(x-3)(x+1)<\log_3 3+\log_3 4$

$\log_3(x-3)(x+1)<\log_3 12$

밑이 1보다 크므로

$(x-3)(x+1)<12$, $x^2-2x-15<0$

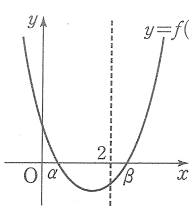
$(x+3)(x-5)<0$ $\therefore -3<x<5$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<5$

따라서 $a=3$, $b=5$이므로 $ab=3\times 5=\mathbf{15}$

19 Action $0<a<2<\beta$가 되는 함수 $f(x)=x^2-6x\log_a 2+\log_2 a$의 그래프의 개형을 그려 본다.

$f(x)=x^2-6x\log_a 2+\log_2 a$라고 할 때 $0<a<2<\beta$가 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(0)=\log_2 a>0$에서

$\log_2 a>\log_2 1$

$\therefore a>1$ ····· ㉠

(ii) $f(2)=4-12\log_a 2+\log_2 a<0$에서

$4-\frac{12}{\log_2 a}+\log_2 a<0$이고, 이때 $\log_2 a$를 t로 치환하면

$4-\frac{12}{t}+t<0$, $t^2+4t-12<0$

$(t+6)(t-2)<0$ $\therefore -6<t<2$

즉 $-6<\log_2 a<2$에서 $\log_2 2^{-6}<\log_2 a<\log_2 2^2$

$\therefore \frac{1}{64}<a<4$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\mathbf{1<a<4}$

20 Action $[a]=n$이면 $n\le a<n+1$이다.

$[\log_2 x]^2=3[\log_2 x]+4$에서 $[\log_2 x]$를 t로 치환하면

$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

(i) $t=-1$일 때, $[\log_2 x]=-1$에서 $-1\le\log_2 x<0$이므로

$\log_2 2^{-1}\le\log_2 x<\log_2 2^0$ $\therefore \frac{1}{2}\le x<1$

(ii) $t=4$일 때, $[\log_2 x]=4$에서 $4\le\log_2 x<5$이므로

$\log_2 2^4\le\log_2 x<\log_2 2^5$ $\therefore 16\le x<32$

(i), (ii)로부터 $\frac{1}{2}\le x<1$ 또는 $16\le x<32$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 정수 x의 개수는 **16**(개)이다.

평가원 기출

21 Action $\log_2 x$를 t로 치환한다.

(진수)>0에서 $x>0$ ····· ㉠

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^5+6<0$에서

$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6<0$

이때 $\log_2 x$를 t로 치환하면 $t^2-5t+6<0$이므로

$(t-2)(t-3)<0$ $\therefore 2<t<3$

즉 $2<\log_2 x<3$에서 $\log_2 2^2<\log_2 x<\log_2 2^3$

밑이 1보다 크므로 $4<x<8$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $4<x<8$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=8$이므로 $\alpha\beta=4\times 8=\mathbf{32}$

22 Action $\log_3 x$를 t로 치환한다.

(진수)>0에서 $x>0$ ····· ㉠

$(\log_3 x)(\log_3 3x)\le 20$에서 $(\log_3 x)(\log_3 3+\log_3 x)\le 20$

$\log_3 x(1+\log_3 x)\le 20$, $(\log_3 x)^2+\log_3 x-20\le 0$

이때 $\log_3 x$를 t로 치환하면 $t^2+t-20\le 0$이므로

$(t+5)(t-4)\le 0$ $\therefore -5\le t\le 4$

즉 $-5\le\log_3 x\le 4$에서 $\log_3 3^{-5}\le\log_3 x\le\log_3 3^4$

밑이 1보다 크므로 $3^{-5}\le x\le 3^4$

$\therefore \frac{1}{243}\le x\le 81$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{243}\le x\le 81$

따라서 자연수 x의 최댓값은 **81**이다.

23 Action 양변에 상용로그를 취한다.

부등식 $2^{3x-1}<5^{3-x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2^{3x-1}<\log 5^{3-x}$, $(3x-1)\log 2<(3-x)\log 5$

$3x\log 2+x\log 5<3\log 5+\log 2$

$\therefore (3\log 2+\log 5)x<3\log 5+\log 2$

이때 $\log 2=0.3$, $\log 5=0.7$에서 $3\log 2+\log 5>0$이므로

$$x<\frac{3\log 5+\log 2}{3\log 2+\log 5}=\frac{3\times 0.7+0.3}{3\times 0.3+0.7}=\frac{2.4}{1.6}$$

$\therefore x<\frac{3}{2}$

24 Action 양변에 로그를 취한다.

(1) (진수)>0에서 $x>0$ …… ㉠

부등식 $16x^3<x^{\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 16x^3<\log_2 x^{\log_2 x}$, $\log_2 16+\log_2 x^3<(\log_2 x)^2$

$\therefore 4+3\log_2 x<(\log_2 x)^2$

이때 $\log_2 x$를 t로 치환하면 $t^2>3t+4$이므로

$t^2-3t-4>0$, $(t+1)(t-4)>0$

$\therefore t<-1$ 또는 $t>4$

즉 $\log_2 x<-1$ 또는 $\log_2 x>4$이므로

$\log_2 x<\log_2\frac{1}{2}$ 또는 $\log_2 x>\log_2 16$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\mathbf{0<x<\frac{1}{2}}$ 또는 $\mathbf{x>16}$

(2) (진수)>0에서 $x>0$ …… ㉠

부등식 $x^{\log_{\frac{1}{2}} x}<x$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x}>\log_{\frac{1}{2}} x$ $\therefore (\log_{\frac{1}{2}} x)^2>\log_{\frac{1}{2}} x$

이때 $\log_{\frac{1}{2}} x$를 t로 치환하면 $t^2>t$이므로

$t^2-t>0$, $t(t-1)>0$ $\therefore t<0$ 또는 $t>1$

즉 $\log_{\frac{1}{2}} x<0$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x>1$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}} 1$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

이때 밑 $\frac{1}{2}$이 0과 1 사이의 수이므로

$x>1$ 또는 $x<\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\mathbf{0<x<\frac{1}{2}}$ 또는 $\mathbf{x>1}$

주의

양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면 밑이 0과 1 사이의 수이므로 부등호의 방향이 반대로 바뀐다. 또 $\log_{\frac{1}{2}} x<0$, $\log_{\frac{1}{2}} x>1$에서 x값의 범위를 구할 때도 밑이 0과 1 사이의 수이므로 부등호의 방향이 반대로 바뀐다.

25 Action 각각의 로그부등식을 푼다.

(i) $\log_3|x-3|<4$

(진수)>0에서 $|x-3|>0$ $\therefore x\neq 3$ …… ㉠

부등식 $\log_3|x-3|<4$, 즉 $\log_3|x-3|<\log_3 3^4$에서

밑이 1보다 크므로

$|x-3|<3^4$, $-81<x-3<81$

$\therefore -78<x<84$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-78<x<3$ 또는 $3<x<84$

(ii) $\log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3$

(진수)>0에서 $x>0$, $x-2>0$ $\therefore x>2$ …… ㉢

부등식 $\log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3$에서

$\log_2 x(x-2)\geq\log_2 2^3$, $\log_2(x^2-2x)\geq\log_2 8$

밑이 1보다 크므로

$x^2-2x\geq 8$, $x^2-2x-8\geq 0$, $(x+2)(x-4)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $x\geq 4$

(i), (ii)로부터 주어진 연립부등식의 해는

$4\leq x<84$이므로 정수 x의 개수는 **80**(개)이다.

26 Action 각각의 부등식의 해를 구한 후 영역을 좌표평면에 나타내어 본다.

(i) $\log_3 x\leq\log_3 y$

(진수)>0에서 $y>0$

$\log_3 x\leq\log_3 y$에서 밑이 1보다 크므로 $x\leq y$ …… ㉠

(ii) $\log_{\frac{1}{2}} x\leq\log_{\frac{1}{2}} y+1$

(진수)>0에서 $y>0$

$\log_{\frac{1}{2}} x\leq\log_{\frac{1}{2}} y+1$

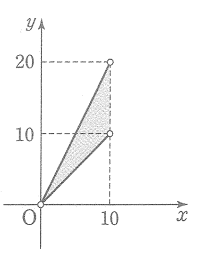
$\log_{\frac{1}{2}} x\leq\log_{\frac{1}{2}} y+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$ $\therefore \log_{\frac{1}{2}} x\leq\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}y$

밑 $\frac{1}{2}$이 1보다 작으므로 $x\geq\frac{1}{2}y$ …… ㉡

$0<x<10$, $y>0$과 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 점 (x, y)의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.

따라서 구하는 영역의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 10\times 10=\mathbf{50}$



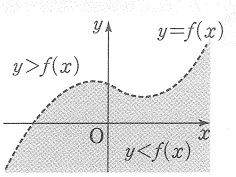
개념 다시보기 부등식 $y>f(x)$ 또는 $y<f(x)$의 영역

(1) 부등식 $y>f(x)$의 영역

$y=f(x)$의 그래프의 윗부분이다. (단, 경계선 제외)

(2) 부등식 $y<f(x)$의 영역

$y=f(x)$의 그래프의 아랫부분이다. (단, 경계선 제외)



Ⅲ 수 열

1. 등차수열

개념 강화 드릴 ①

본문 157쪽

01 (1) 일반항이 $a_n=3^{n-1}$인 수열에서 제1항부터 제5항까지를 구하면

$a_1=3^{1-1}=3^0=\mathbf{1}$, $a_2=3^{2-1}=3^1=\mathbf{3}$,

$a_3=3^{3-1}=3^2=\mathbf{9}$, $a_4=3^{4-1}=3^3=\mathbf{27}$,

$a_5=3^{5-1}=3^4=\mathbf{81}$

(2) 일반항이 $a_n=\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$인 수열에서 제1항부터 제5항까지를 구하면

$a_1=\dfrac{(1+1)^2}{1(1+2)}=\dfrac{2^2}{1\cdot3}=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$

$a_2=\dfrac{(2+1)^2}{2(2+2)}=\dfrac{3^2}{2\cdot4}=\mathbf{\dfrac{9}{8}}$

$a_3=\dfrac{(3+1)^2}{3(3+2)}=\dfrac{4^2}{3\cdot5}=\mathbf{\dfrac{16}{15}}$

$a_4=\dfrac{(4+1)^2}{4(4+2)}=\dfrac{5^2}{4\cdot6}=\mathbf{\dfrac{25}{24}}$

$a_5=\dfrac{(5+1)^2}{5(5+2)}=\dfrac{6^2}{5\cdot7}=\mathbf{\dfrac{36}{35}}$

(3) 일반항이 $a_n=\log(2n+1)$인 수열에서 제1항부터 제5항까지를 구하면

$a_1=\log(2\cdot1+1)=\mathbf{\log 3}$

$a_2=\log(2\cdot2+1)=\mathbf{\log 5}$

$a_3=\log(2\cdot3+1)=\mathbf{\log 7}$

$a_4=\log(2\cdot4+1)=\mathbf{\log 9}$

$a_5=\log(2\cdot5+1)=\mathbf{\log 11}$

02 (1) $a_n=(-1)^{n-1}$

(2) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$

(3) $a_n=(n+1)^2-n$

03 $a_n=\underbrace{33\cdots3}_{n\text{개}}=\dfrac{1}{3}\times\underbrace{99\cdots9}_{n\text{개}}=\dfrac{1}{3}(10^n-1)$

04 (1) $9-3=6$, $15-9=6$, $21-15=6$이므로 주어진 수열은 공차가 6인 등차수열이다.

$\therefore$ 3, 9, 15, 21, **27**, **33**

(2) $-7-(-11)=4$, $-3-(-7)=4$이므로 주어진 수열은 공차가 4인 등차수열이다.

$\therefore$ -11, -7, -3, **1**, **5**, 9

(3) $13-25=-12=2\times(-6)$,

$-5-13=-18=3\times(-6)$이므로 주어진 수열은 공차가 -6인 등차수열이다.

$\therefore$ 25, **19**, 13, **7**, **1**, -5

더른 풀이

(3) 주어진 수열은 첫째항에 일정한 수를 더하여 만든 수열이므로 25와 13 사이의 수를 x라고 하면

$x-25=13-x$, $2x=38$ $\therefore x=19$

이때 $19-25=-6$, $13-19=-6$이므로 주어진 수열은 공차가 -6인 등차수열이다.

$\therefore$ 25, 19, 13, 7, 1, -5

05 (1) -21, -18, -15, -12, …는 첫째항이 -21, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=-21+(n-1)\times3=\mathbf{3n-24}$이고

$a_{10}=3\times10-24=\mathbf{6}$

(2) $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}$, …는 첫째항이 $\dfrac{1}{6}$, 공차가 $\dfrac{1}{6}$인 등차수열이므로

$a_n=\dfrac{1}{6}+(n-1)\times\dfrac{1}{6}=\mathbf{\dfrac{n}{6}}$이고

$a_{10}=\dfrac{10}{6}=\mathbf{\dfrac{5}{3}}$

(3) 7, 5, 3, 1, …은 첫째항이 7, 공차가 -2인 등차수열이므로

$a_n=7+(n-1)\times(-2)=\mathbf{-2n+9}$이고

$a_{10}=-2\times10+9=\mathbf{-11}$

06 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

(1) $a_2=7$에서 $a_2=a+(2-1)d=7$

$\therefore a+d=7$ …… ㉠

$a_5=16$에서 $a_5=a+(5-1)d=16$

$\therefore a+4d=16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=3$

따라서 **첫째항은 4이고 공차는 3이다.**

(2) $a_3=26$에서 $a_3=a+(3-1)d=26$

$\therefore a+2d=26$ …… ㉠

$a_9=14$에서 $a_9=a+(9-1)d=14$

$\therefore a+8d=14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=30$, $d=-2$

따라서 **첫째항은 30이고 공차는 -2이다.**

(3) $a_5=-9$에서 $a_5=a+(5-1)d=-9$

$\therefore a+4d=-9$ …… ㉠

$a_8=-6$에서 $a_8=a+(8-1)d=-6$

$\therefore a+7d=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-13$, $d=1$

따라서 **첫째항은 -13이고 공차는 1이다.**

07 (1) $a_1=3$에서 첫째항이 3이고, $a_{n+1}-a_n=2$에서 공차가 2인 등차수열이므로 일반항은
$a_n=3+2(n-1)=\mathbf{2n+1}$
(2) $a_1=20$에서 첫째항이 20이고, $a_{n+1}=a_n-3$에서 $a_{n+1}-a_n=-3$, 즉 공차가 -3인 등차수열이므로 일반항은
$a_n=20-3(n-1)=\mathbf{-3n+23}$

확인 문제 본문 158~159쪽

01-1 Action 첫째항 a와 공차 d에 대한 연립방정식을 세워 a와 d를 구한다.
(1) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_2=3$에서 $a+d=3$ ····· ㉠
$a_5=24$에서 $a+4d=24$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-4$, $d=7$
$\therefore a_7=a+6d=-4+6\times7=\mathbf{38}$
(2) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_2=8$에서 $a+d=8$ ····· ㉠
$a_4:a_{10}=3:8$에서 $8a_4=3a_{10}$이므로
$8(a+3d)=3(a+9d)$ $\therefore 5a=3d$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=3$, $d=5$
$\therefore a_{14}=a+13d=3+13\times5=\mathbf{68}$

01-2 Action 35가 제 몇 항인지 생각해 공차를 구한다.
첫째항을 a, 공차를 d라고 할 때, 2와 35 사이에 10개의 수를 넣어서 등차수열을 만들면 2는 첫째항이므로 $a=2$이고, 35는 제12항이므로
$2+11d=35$에서 $11d=33$ $\therefore \mathbf{d=3}$
이때 x_6은 제7항이므로
$x_6=2+6d=2+6\times3=\mathbf{20}$

주의
x_6이라고 해서 제6항을 구하지 않도록 하자.

LECTURE **항의 개수**
$2, \underbrace{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{10}}, 35$
(1개, 10개, 1개)
위에서 항은 총 12개이다. 이때 35는 맨 마지막 항이니까 제12항이 된다. 이처럼 두 수 사이에 n개의 수를 넣어 등차수열을 만들면 맨 마지막 수는 $(n+2)$째항이 된다.

02-1 Action 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$를 이용한다.
(1) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_{11}=70$에서 $a+10d=70$ ····· ㉠
$a_{26}=25$에서 $a+25d=25$ ····· ㉡
㉡−㉠에서 $15d=-45$ $\therefore d=-3$
$d=-3$을 ㉠에 대입하면 $a=100$이므로
$a_n=100+(n-1)\times(-3)=-3n+103$
처음으로 음수가 나오려면 $a_n<0$이어야 하므로
$-3n+103<0$ $\therefore n>\frac{103}{3}=34.\times\times\times$
따라서 처음으로 부호가 바뀌는 항은 제**35**항이다.
(2) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_{10}=35$에서 $a+9d=35$ ····· ㉠
$a_5:a_{15}=2:5$에서 $5a_5=2a_{15}$
$5(a+4d)=2(a+14d)$ $\therefore 3a=8d$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $d=3$
이때 $a_n=8+3(n-1)=3n+5$이므로
$3n+5>100$ $\therefore n>\frac{95}{3}=31.66\times\times$
따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제**32**항이다.

02-2 Action 두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼서 공차를 구한다.
첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_1+a_3+a_5=-30$에서
$a+(a+2d)+(a+4d)=3a+6d=-30$ ····· ㉠
$a_2+a_4+a_6=-21$에서
$(a+d)+(a+3d)+(a+5d)=3a+9d=-21$ ····· ㉡
㉡−㉠에서 $3d=9$ $\therefore d=3$
$d=3$을 ㉠에 대입하면
$3a+18=-30$, $3a=-48$ $\therefore a=-16$
이때 $a_n=-16+3(n-1)=3n-19$이므로
$3n-19>0$ $\therefore n>\frac{19}{3}=6.33\times\times$
따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제**7**항이다.

LECTURE **부호가 바뀌는 항**
첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항
$a_n=a+(n-1)d$에서
(i) $a<0$, $d>0$
⇨ 수열 $\{a_n\}$은 음수에서부터 점점 증가하는 수열이 된다. 즉 처음으로 양수가 되는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.
(ii) $a>0$, $d<0$
⇨ 수열 $\{a_n\}$은 양수에서부터 점점 감소하는 수열이 된다. 즉 처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

개념 강화 드릴 ②

본문 161 쪽

01 (1) $\frac{2+16}{2}=\frac{18}{2}=9$

(2) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{\frac{3}{4}}{2}=\frac{3}{8}$

(3) $\frac{3+\frac{1}{3}}{2}=\frac{\frac{10}{3}}{2}=\frac{5}{3}$

(4) $\frac{\log 2+\log 8}{2}=\frac{\log(2\times 8)}{2}=\frac{\log 16}{2}=\frac{4\log 2}{2}$

$=2\log 2$

더른 풀이

(4) $\frac{\log 2+\log 8}{2}=\frac{\log 2+\log 2^3}{2}=\frac{\log 2+3\log 2}{2}$

$=\frac{4\log 2}{2}=2\log 2$

02 6, x, y가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$6+y=2x$에서 $y=2x-6$ ……㉠

또 x^2, 10, y^2이 이 순서로 등차수열을 이루므로

$x^2+y^2=20$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(2x-6)^2=20$, $5x^2-24x+16=0$에서

$(5x-4)(x-4)=0$ $\therefore x=\frac{4}{5}$ 또는 $x=4$

이때 x는 자연수이므로

$x=4$, $y=2\times 4-6=2$

03 (1) 첫째항이 -5이고 제10항이 40인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$S_{10}=\frac{10(-5+40)}{2}=175$

(2) 첫째항이 15이고 제10항이 -25인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$S_{10}=\frac{10(15-25)}{2}=-50$

(3) 첫째항이 $\log 2$이고 제10항이 $\log 1024$인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$S_{10}=\frac{10(\log 2+\log 1024)}{2}$ → $\log 1024=\log 2^{10}=10\log 2$

$=\frac{10\times 11\log 2}{2}=55\log 2$

04 (1) 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$S_{10}=\frac{10\{2\times 1+(10-1)\times 2\}}{2}=100$

(2) 첫째항이 3이고 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$S_{10}=\frac{10\{2\times 3+(10-1)\times 4\}}{2}=210$

(3) 첫째항이 -21이고 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$S_{10}=\frac{10\{2\times(-21)+(10-1)\times 4\}}{2}=-30$

05 첫째항이 -21이고 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\frac{n\{2\times(-21)+(n-1)\times 4\}}{2}=n(2n-23)$

첫째항부터 제n항까지의 합이 양이 되어야 하므로

$n(2n-23)>0$에서 $n>\frac{23}{2}$ ($\because n>0$)

따라서 합이 처음으로 양이 되는 것은 첫째항부터 제12항까지 더할 때이다.

06 (1) $S_n=n^2-2n$에서 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$이므로

$a_8=S_8-S_7$

$=(8^2-2\times 8)-(7^2-2\times 7)$ → $8^2-7^2-(2\times 8-2\times 7)$ $=(8-7)(8+7)-2(8-7)$ $=15-2=13$ 과 같이 계산해도 된다.

$=(64-16)-(49-14)=13$

(2) $S_n=2n^2-3n$에서 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$이므로

$a_8=S_8-S_7$

$=(2\times 8^2-3\times 8)-(2\times 7^2-3\times 7)$ → $2(8^2-7^2)-3(8-7)$ $=2\times 15-3=27$ 과 같이 계산해도 된다.

$=(128-24)-(98-21)=27$

더른 풀이

(1) $S_n=n^2-2n$에서 $n\geq 2$일 때

$a_n=(n^2-2n)-\{(n-1)^2-2(n-1)\}=2n-3$

$\therefore a_8=2\times 8-3=13$

(2) $S_n=2n^2-3n$에서 $n\geq 2$일 때

$a_n=(2n^2-3n)-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}=4n-5$

$\therefore a_8=4\times 8-5=27$

07 (1) $S_n=n^2+n$에서

(i) $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$=2n$ $(n\geq 2)$ ……㉠

(ii) $a_1=S_1=2$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같다.

따라서 첫째항은 2이고 일반항은 $a_n=2n$이다.

(2) $S_n=n^2+n-1$에서

(i) $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+n-1)-\{(n-1)^2+(n-1)-1\}$

$=2n (n\geq 2)$ ····· ㉠

(ii) $a_1=S_1=1$

그런데 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않다.

따라서 첫째항은 1이고 일반항은 $a_1=1$, $a_n=2n\ (n\geq 2)$이다.

08 (1)의 수열은 첫째항부터 등차수열을 이루고, (2)의 수열은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

이로부터 알 수 있는 사실은 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n이 상수항이 0인 이차식이면 이 수열은 첫째항부터 등차수열을 이루고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n이 상수항이 0이 아닌 이차식이면 이 수열은 둘째항부터 등차수열을 이룬다는 것이다.

확인 문제 본문 162~168 쪽

3-1 Action 등차수열을 이루는 세 근을 각각 $a-d$, a, $a+d$로 놓는다.

$x^3-6x^2+3x+k=0$의 세 근이 등차수열을 이루므로 세 근을 각각 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$, $3a=6$ $\therefore a=2$ ····· ㉠

$(a-d)a+a(a+d)+(a-d)(a+d)=3$

즉 $3a^2-d^2=3$이고 이 식에 ㉠을 대입하면

$d^2=9$ $\therefore d=\pm 3$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 세 근은 -1, 2, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1\times 2\times 5=-k$, $-k=-10$ $\therefore k=10$

다른 풀이

$x^3-6x^2+3x+k=0$ ····· ㉠의 세 근을 $a-d$, a, $a+d$라고 하면 세 근의 합은

$(a-d)+a+(a+d)=6$, $3a=6$ $\therefore a=2$

즉 ㉠의 한 근이 2이므로 $x=2$를 ㉠에 대입하면

$2^3-6\times 2^2+3\times 2+k=0$ $\therefore k=10$

개념 다시보기 삼차방정식의 근과 계수의 관계

x에 대한 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0 (a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 관계가 성립한다.

❶ $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

❷ $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$

❸ $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

3-2 Action $f(x)$를 $x+1$, $x+2$, $x+5$로 나눈 나머지를 각각 k에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=x^2+kx-1$을 $x+1$, $x+2$, $x+5$로 나눌 때의 나머지는 각각 $f(-1)$, $f(-2)$, $f(-5)$이다. 이때

$f(-1)=(-1)^2+(-1)k-1=-k$

$f(-2)=(-2)^2+(-2)k-1=-2k+3$

$f(-5)=(-5)^2+(-5)k-1=-5k+24$

이고, 이 순서로 등차수열을 이루므로

$-k+(-5k+24)=2\times(-2k+3)$

$-6k+24=-4k+6$, $2k=18$

$\therefore k=9$

개념 다시보기 나머지정리

x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나눈 나머지는 $P(a)$이다.

쌤피 특강 확인 01 본문 163 쪽

(1) 주어진 수열에서 각 항의 역수를 구해서 나열하면

$1, \dfrac{3}{2}, 2, \dfrac{5}{2}, 3, \dfrac{7}{2}, \cdots$

이 수열은 첫째항이 1, 공차가 $\dfrac{1}{2}$인 등차수열이므로

일반항은 $1+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n+1}{2}$이고 제 10 항은 $\dfrac{11}{2}$이다.

따라서 주어진 수열의 일반항은 $\dfrac{2}{n+1}$이고 제 10 항은 $\dfrac{2}{11}$이다.

(2) a, b의 등차중항이 8이므로

$\dfrac{a+b}{2}=8$ $\therefore a+b=16$ ····· ㉠

a, b의 조화중항이 6이므로

$\dfrac{2ab}{a+b}=6$ $\therefore ab=3(a+b)$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $ab=48$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=16^2-2\times 48=160$

(3) 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-4$

이때 두 수 α, β의 등차중항은 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-1$,

조화중항은 $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{2\times(-4)}{-2}=4$

따라서 구하는 이차방정식은

$(x+1)(x-4)=0$ $\therefore x^2-3x-4=0$

참고

세 수 a, b, c가 이 순서로 조화수열을 이룰 때

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}$ $\therefore b=\dfrac{2ac}{a+c}$

셀파 특강 **확인 02** 본문 164 쪽

(1) $1+2+3+\cdots+k$에서 첫째항이 1, 끝항이 k, 항수가 k인 등차수열의 첫째항부터 제k항까지의 합 S_k는

$S_k=\dfrac{k(1+k)}{2}=\dfrac{\boldsymbol{k(k+1)}}{\boldsymbol{2}}$

(2) $1+3+5+\cdots+(2k-1)$에서 첫째항이 1, 끝항이 $2k-1$, 항수가 k인 등차수열의 첫째항부터 제k항까지의 합 S_k는

$S_k=\dfrac{k\{1+(2k-1)\}}{2}=\dfrac{k\times 2k}{2}=\boldsymbol{k^2}$

평가원 기출

4-1 Action 첫째항부터 제 10 항까지의 합에서 공차를 구한다.

첫째항은 2이고 공차를 d라고 하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\dfrac{10\{2\times 2+(10-1)d\}}{2}=200$

$4+9d=40,\ 9d=36 \quad \therefore d=4$

$\therefore a_{11}=a+10d=2+10\times 4=\boldsymbol{42}$

4-2 Action $a_{41}+a_{42}+\cdots+a_{60}=S_{60}-S_{40}$을 이용한다.

첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이다.

이때 $S_{20}=400$에서

$\dfrac{20(2a+19d)}{2}=400 \quad \therefore 2a+19d=40 \quad \cdots\cdots$㉠

$S_{40}-S_{20}=1200$에서 $S_{40}=1600$이므로

$\dfrac{40(2a+39d)}{2}=1600 \quad \therefore 2a+39d=80 \quad \cdots\cdots$㉡

㉡−㉠에서

$20d=40 \quad \therefore d=2$

$d=2$를 ㉠에 대입하면 $2a=2 \quad \therefore a=1$

따라서 이 수열의 제 41 항부터 제 60 항까지의 합은

$S_{60}-S_{40}=\dfrac{60\{2+(60-1)\times 2\}}{2}-1600$

$=3600-1600=\boldsymbol{2000}$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$에서 같은 항만큼 합한 것들도 등차수열을 이루므로 ⇦ 본문 168쪽 셀파 특강 03 참조

$S_{20},\ S_{40}-S_{20},\ S_{60}-S_{40}$도 이 순서로 등차수열을 이룬다. 즉

$(S_{40}-S_{20})-S_{20}=(S_{60}-S_{40})-(S_{40}-S_{20})$이므로

$S_{60}-S_{40}-1200=1200-400$

$\therefore S_{60}-S_{40}=2000$

셀파 특강 **확인 03** 본문 166 쪽

(1) 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=2+(-1)=1$이고, 제 4 항은 $a_4+b_4=10$인 등차수열이다.

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$의 공차를 d라고 하면

$1+3d=10$에서 $d=3$

$\therefore (a_1+a_2+\cdots+a_{12})+(b_1+b_2+\cdots+b_{12})$

$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{12}+b_{12})$

$=\dfrac{12(2\times 1+11\times 3)}{2}=\boldsymbol{210}$

(2) 수열 $\{a_n-b_n\}$은 제 3 항이 $a_3-b_3=7$, 제 4 항이 $a_4-b_4=11$인 등차수열이다.

따라서 수열 $\{a_n-b_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a+2d=7 \quad \cdots\cdots$㉠, $a+3d=11 \quad \cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ d=4$

$\therefore (a_1+a_2+\cdots+a_{10})-(b_1+b_2+\cdots+b_{10})$

$=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_{10}-b_{10})$

$=\dfrac{10\{2\times(-1)+9\times 4\}}{2}=\boldsymbol{170}$

(3) 수열 $\{a_n+b_n+c_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1+c_1=5$, 제 100 항이 $a_{100}+b_{100}+c_{100}=95$인 등차수열이다.

$\therefore (a_1+\cdots+a_{100})+(b_1+\cdots+b_{100})+(c_1+\cdots+c_{100})$

$=(a_1+b_1+c_1)+(a_2+b_2+c_2)+\cdots+(a_{100}+b_{100}+c_{100})$

$=\dfrac{100(5+95)}{2}=\boldsymbol{5000}$

5-1 Action S_4와 S_{10}의 값에서 첫째항과 공차를 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$S_4=32$에서

$\dfrac{4(2a+3d)}{2}=32 \quad \therefore 2a+3d=16 \quad \cdots\cdots$㉠

$S_{10}=20$에서

$\dfrac{10(2a+9d)}{2}=20 \quad \therefore 2a+9d=4 \quad \cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=11,\ d=-2$이므로

$a_n=11+(n-1)\times(-2)=-2n+13$

이때 S_n의 값이 최대가 되는 것은

$a_n=-2n+13<0 \quad \therefore n>\dfrac{13}{2}=6.5$

따라서 제 6 항까지는 양수이고 제 7 항부터는 음수이다. 즉 $\boldsymbol{n=6}$일 때 S_n은 최대이고, 그때의 최댓값은

$S_6=\dfrac{6\{2\times 11+5\times(-2)\}}{2}=\boldsymbol{36}$

다른 풀이

$a=11,\ d=-2$이므로

$S_n=\dfrac{n\{22-2(n-1)\}}{2}=-n^2+12n=-(n-6)^2+36$

에서 S_n은 $n=6$일 때 최댓값 36을 가진다.

5-2 Action $S_n<0$을 만족시키는 최소의 자연수 n의 값을 구한다.

첫째항은 15이고, 공차를 d, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_3=\frac{3(2\times15+2d)}{2}=45+3d$

$S_8=\frac{8(2\times15+7d)}{2}=120+28d$

$S_3=S_8$에서 $45+3d=120+28d$이므로

$25d=-75 \quad \therefore d=-3$

이때 $S_n=\frac{n\{2\times15-3(n-1)\}}{2}=\frac{-3n(n-11)}{2}$이고

$S_n<0$에서

$-n(n-11)<0,\ n-11>0 \quad \therefore n>11 (\because n>0)$

따라서 이 등차수열은 첫째항부터 제 **12**항까지 더할 때 처음으로 음수가 된다.

6-1 Action 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용해 일반항을 구한다.

$S_n=2n^2-5n+1$에서

(i) $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2-5n+1)-\{2(n-1)^2-5(n-1)+1\}$

$=4n-7 (n\geq2) \quad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $a_1=S_1=-2$

그런데 $a_1=-2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않다.

따라서 $a_1=-2$, $a_n=4n-7 (n\geq2)$이므로 첫째항은 -2이고, $a_{10}=4\times10-7=$ **33**이다.

다른 풀이

$S_n=2n^2-5n+1$에서

$a_1=S_1=2-5+1=-2$

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(2\times10^2-5\times10+1)-(2\times9^2-5\times9+1)$

$=(200-50+1)-(162-45+1)=33$

6-2 Action $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구한다.

$S_n=2n^2-25n$에서

(i) $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2-25n)-\{2(n-1)^2-25(n-1)\}$

$=4n-27 (n\geq2) \quad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $a_1=S_1=-23$

이때 $a_1=-23$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항 $a_n=4n-27$이다.

$a_n<0$에서 $4n-27<0 \quad \therefore n<\frac{27}{4}=6.75$

따라서 음수항은 제 6 항까지이며 $a_1=-23$, $a_6=-3$에서

$S_6=\frac{6(-23-3)}{2}=$ **−78**

참고

첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n이 $S_n=2n^2-25n$이므로 이 식에 $n=6$을 대입하여 S_6을 구해도 된다.

LECTURE **등차수열의 합과 일반항의 관계**

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n이 $S_n=An^2+Bn+C$ (A, B, C는 상수)일 때

(i) $C=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

(ii) $C\neq0$이면 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

실력 비결 **확인 04** 본문 169 쪽

(1) 100 이하의 자연수 중에서 7의 배수의 합은 첫째항이 7이고 공차가 7인 등차수열의 첫째항 7부터 제 14 항 98까지의 합과 같으므로

(100 이하의 자연수 중 7의 배수의 총합)

$=\frac{14(7+98)}{2}=\frac{14\times105}{2}=$ **735**

(2) 2 또는 5의 배수인 수들의 합은 2의 배수의 총합에 5의 배수의 총합을 더하고 공배수인 10의 배수의 총합을 뺀 것과 같다.

(i) 100 이하의 자연수 중에서 2의 배수의 합은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항 2부터 제 50 항 100까지의 합과 같으므로

(100 이하의 자연수 중 2의 배수의 총합)

$=\frac{50(2+100)}{2}=\frac{50\times102}{2}=2550$

(ii) 100 이하의 자연수 중에서 5의 배수의 합은 첫째항이 5이고 공차가 5인 등차수열의 첫째항 5부터 제 20 항 100까지의 합과 같으므로

(100 이하의 자연수 중 5의 배수의 총합)

$=\frac{20(5+100)}{2}=\frac{20\times105}{2}=1050$

(iii) 100 이하의 자연수 중에서 10의 배수의 합은 첫째항이 10이고 공차가 10인 등차수열의 첫째항 10부터 제 10 항 100까지의 합과 같으므로

(100 이하의 자연수 중 10의 배수의 총합)

$=\frac{10(10+100)}{2}=\frac{10\times110}{2}=550$

따라서 100 이하의 자연수 중에서 2 또는 5의 배수인 수들의 합은 $2550+1050-550=$ **3050**

(3) 5로 나눌 때 4가 남는 자연수는 $5k-1$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) 꼴이므로 첫째항이 4이고 공차가 5인 등차수열이다. 이 수열에는 100보다 작은 자연수의 항이 4부터 99까지 20개가 있으므로 구하는 합 S_{20}은

$S_{20}=\frac{20(4+99)}{2}=\frac{20\times103}{2}=$ **1030**

(4) 2로 나눌 때 1이 남는 자연수는 $2m-1$ ($m=1, 2, 3, \cdots$) 꼴이고, 3으로 나눌 때 2가 남는 자연수는 $3n-1$($n=1, 2, 3, \cdots$) 꼴이다. 따라서 2로 나눌 때 1이 남고, 3으로 나눌 때 2가 남는 자연수는 $6k-1$($k=1, 2, 3, \cdots$) 꼴이므로 첫째항이 5이고 공차가 6인 등차수열이다. 이 수열에는 100보다 작은 자연수의 항이 5부터 95까지 16개가 있으므로 구하는 합 S_{16}은

$$S_{16}=\frac{16(2\times5+15\times6)}{2}$$
$$=\frac{16(10+90)}{2}=\mathbf{800}$$

(5) 50과 350 사이의 자연수 중에서 일의 자리 수가 1인 자연수는 51, 61, 71, …, 341이므로 첫째항이 51이고 공차가 10인 등차수열이다. 이 수열에는 50과 350 사이의 자연수의 항이 51부터 341까지 30개가 있으므로 구하는 합 S_{30}은

$$S_{30}=\frac{30(2\times51+29\times10)}{2}$$
$$=\frac{30(102+290)}{2}=\mathbf{5880}$$

LECTURE 2로 나눌 때 1이 남고, 3으로 나눌 때 2가 남는 수

2로 나눌 때 1이 남는 자연수는 $2m-1$($m=1, 2, 3, \cdots$)이고, 3으로 나눌 때 2가 남는 자연수는 $3n-1$($n=1, 2, 3, \cdots$)임은 쉽게 알 수 있다. 그런데 2로 나눌 때 1이 남고, 3으로 나눌 때 2가 남는 자연수 $6k-1$($k=1, 2, 3, \cdots$)은 어떻게 구할까?

2로 나누어 1이 남는 수는 1을 더하거나 빼면 2의 배수가 되고, 3으로 나누어 2가 남는 수는 1을 더하거나 2를 빼면 3의 배수가 된다. 이때 두 경우에서 같은 수를 빼거나 같은 수를 더하는 경우를 찾아 2와 3의 공배수 6에서 같은 수를 빼거나 같은 수를 더해주면 된다. 이 경우에서는 1을 더하면 2의 배수도 되고, 3의 배수도 되므로 6의 배수도 되는 것이다.
따라서 구하는 수는 1을 더하면 6의 배수가 되므로 6의 배수에서 1을 뺀 수이다. 즉 $6k-1$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) 꼴이다.

같은 방법으로 4로 나눌 때 2가 남고 5로 나눌 때 3이 남는 수를 구해 보자.

4로 나눌 때 2가 남는 수는 2를 더하거나 빼면 4의 배수가 되고, 5로 나눌 때 3이 남는 수는 2를 더하거나 3을 빼면 5의 배수가 된다. 이 경우에는 2를 더하면 4의 배수도 되고, 5의 배수도 되므로 4와 5의 공배수 20의 배수도 된다는 것에 주목하면 4로 나눌 때 2가 남고 5로 나눌 때 3이 남는 수는
$20k-2$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)로 놓을 수 있다.

이와 같이 생각하는 것이 어렵다면 두 가지 경우를 모두 만족시키는 수는 등차수열을 이루므로 처음 몇 개의 수를 나열해 본 다음 규칙을 찾아내도 된다.

기본강화 본문 170~171 쪽

01 Action 첫째항 a와 공차 d에 대한 연립방정식을 세워 a와 d의 값을 구한다.

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_3=7$에서 $a+2d=7$ ……㉠
$a_7 : a_{10}=5 : 7$에서 $7a_7=5a_{10}$이므로
$7(a+6d)=5(a+9d)$ $\therefore 2a=3d$ ……㉡
㉠에서 $a=7-2d$를 ㉡에 대입하면
$2(7-2d)=3d$, $14=7d$ $\therefore d=2$
$d=2$를 ㉡에 대입하면
$2a=6$ $\therefore a=3$
따라서 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$이므로
$2n+1=25$ $\therefore n=12$
즉 25는 **제 12 항**이다.

02 Action 첫째항은 10이고 30은 $k+2$번째 항이다.

10과 30 사이에 k개의 자연수를 넣어서 등차수열을 만들면 10은 첫째항이고 30은 제 $k+2$ 항이므로 $10+(k+1)d=30$에서 $(k+1)d=20$
그런데 k와 d는 자연수이므로 곱해서 20이 되는 두 자연수를 생각하면 다음 6가지 경우가 있다.
(i) $k+1=1$, $d=20$ $\rightarrow k=0$, $d=20$
(ii) $k+1=2$, $d=10$ $\rightarrow \boldsymbol{k=1, d=10}$
(iii) $k+1=4$, $d=5$ $\rightarrow \boldsymbol{k=3, d=5}$
(iv) $k+1=5$, $d=4$ $\rightarrow \boldsymbol{k=4, d=4}$
(v) $k+1=10$, $d=2$ $\rightarrow \boldsymbol{k=9, d=2}$
(vi) $k+1=20$, $d=1$ $\rightarrow \boldsymbol{k=19, d=1}$
여기서 (i)은 k가 자연수가 아닌 경우이므로 구하는 경우는 (i)을 제외한 나머지 5가지 경우이다.

03 Action 두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼서 공차를 구한다.

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면
$a_1+a_3+a_5=42$에서
$a+(a+2d)+(a+4d)=3a+6d=42$ ……㉠
$a_2+a_4+a_6=33$에서
$(a+d)+(a+3d)+(a+5d)=3a+9d=33$ ……㉡
㉡−㉠에서 $3d=-9$ $\therefore d=-3$
$d=-3$을 ㉠에 대입하면
$3a-18=42$, $3a=60$에서 $a=20$
이때 $a_n=20+(n-1)\times(-3)=-3n+23$이므로
$a_n=-3n+23<0$에서 $n>\frac{23}{3}=7.66\times\times$
따라서 처음으로 음수가 되는 항은 **제 8 항**이다.

04 Action 공차를 d라 하고 $a_2=-a_7$을 이용한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면, 첫째항이 7이고 a_2와 a_7은 절댓값이 같고 부호는 서로 다르므로 $a_2+a_7=0$에서

$(7+d)+(7+6d)=0$, $14+7d=0$ $\therefore d=\mathbf{-2}$

05 Action 두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼서 공차를 구한다.

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_1+a_2+a_3=-45$에서

$a+(a+d)+(a+2d)=3a+3d=-45$ ……㉠

$a_2+a_3+a_4=-30$에서

$(a+d)+(a+2d)+(a+3d)=3a+6d=-30$ ……㉡

㉡−㉠에서 $3d=15$ $\therefore d=5$

$d=5$를 ㉠에 대입하면

$3a+15=-45$, $3a=-60$ $\therefore a=-20$

따라서 $a_n=-20+(n-1)\times5=5n-25$이므로

$100\le5n-25<1000$에서

$125\le5n<1025$ $\therefore 25\le n<205$

이때 $205-25=180$이므로 등차수열 $\{a_n\}$에서 세 자리 자연수인 항은 **180**개이다.

참고

a, b가 자연수일 때

❶ $a\le n\le b$를 만족시키는 자연수 n의 개수 ⇨ $b-a+1$

❷ $a\le n<b$를 만족시키는 자연수 n의 개수 ⇨ $b-a$

❸ $a<n\le b$를 만족시키는 자연수 n의 개수 ⇨ $b-a$

❹ $a<n<b$를 만족시키는 자연수 n의 개수 ⇨ $b-a-1$

06 Action 등차중항을 이용하여 d와 c의 값을 구한다.

가로 첫째 줄 a, 7, e가 등차수열을 이루므로

$2\times7=a+e$에서 $a+e=14$ ……㉠

가로 셋째 줄 -3, d, 5가 등차수열을 이루므로

$2d=-3+5$에서 $d=1$

세로 둘째 줄 7, c, 1이 등차수열을 이루므로

$2c=7+1$에서 $c=4$

가로 둘째 줄 b, 4, f가 등차수열을 이루므로

$2\times4=b+f$에서 $b+f=8$ ……㉡

㉠−㉡에서

$(a+e)-(b+f)=a-b+e-f=\mathbf{6}$

다른 풀이

가로로 쓰인 수들과 세로로 쓰인 수들이 모두 등차수열을 이루므로 대각선으로 쓰인 수들도 등차수열을 이루게 된다. 이를 이용하여 a, b, c, d, e, f의 값을 모두 구하면 오른쪽과 같다. 즉

$a=3$, $b=0$, $e=11$, $f=8$이므로

$a-b+e-f=3-0+11-8=6$

3	7	11
0	4	8
−3	1	5

07 Action x^2의 계수를 k, x의 계수를 $k-1$, 상수항을 $k-2$로 놓는다.

이차방정식 $f(x)=0$에서 x^2의 계수를 k, x의 계수를 $k-1$, 상수항을 $k-2$로 놓으면 → 이 순서로 공차가 −1인 등차수열을 이루므로

$f(x)=kx^2+(k-1)x+k-2$ (단, $k\neq0$)

이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 2이므로

$f(2)=4k+2(k-1)+k-2=0$, $7k-4=0$ $\therefore k=\frac{4}{7}$

즉 $f(x)=\frac{4}{7}x^2-\frac{3}{7}x-\frac{10}{7}$이므로 $\frac{4}{7}x^2-\frac{3}{7}x-\frac{10}{7}=0$의 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의해

$$-\frac{-\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}}=-\frac{-3}{4}=\frac{3}{4}$$

08 Action $2x^3-12x^2+20=kx$의 세 근이 등차수열을 이룬다.

곡선 $y=2x^3-12x^2+20$과 직선 $y=kx$가 만나는 세 점의 x좌표는 삼차방정식 $2x^3-12x^2+20=kx$의 세 근이다.

즉 삼차방정식 $2x^3-12x^2-kx+20=0$의 세 근이 등차수열을 이루므로 세 근을 각각 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$ ……㉠

$a(a-d)+a(a+d)+(a-d)(a+d)=-\frac{k}{2}$ ……㉡

$a(a-d)(a+d)=-10$ ……㉢

㉠에서 $3a=6$, 즉 $a=2$이고, 이것을 ㉢에 대입하면

$2(2-d)(2+d)=-10$에서 $4-d^2=-5$ $\therefore d^2=9$

㉡에서 $3a^2-d^2=-\frac{k}{2}$이고, 여기에 $a=2$, $d^2=9$를 대입하면

$-\frac{k}{2}=3\times2^2-9$ $\therefore k=\mathbf{-6}$

다른 풀이

㉠에서 $a=2$이므로, 즉 삼차방정식 $2x^3-12x^2-kx+20=0$의 한 근이 2이므로

$2\times2^3-12\times2^2-2k+20=0$, $16-48-2k+20=0$

$\therefore k=-6$

09 Action 최소각의 크기가 75°이므로 네 각의 크기를 75, $75+d$, $75+2d$, $75+3d$로 놓는다.

최소각의 크기가 75°이고 네 각이 순서대로 등차수열을 이루므로 네 각의 크기를 75°, $75°+d$, $75°+2d$, $75°+3d$로 놓으면 사각형의 내각의 합은 360°이므로

$75°+(75°+d)+(75°+2d)+(75°+3d)=360°$

$6d=60°$ $\therefore d=10°$

이때 최대각의 크기는 $75°+3d$이므로

$75°+(3\times10)°=\mathbf{105°}$

10 Action 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$x^2+6x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=3$

이때 세 수 α, p, β가 등차수열을 이루므로

$2p=\alpha+\beta=-6$ $\therefore p=-3$

또 세 수 α, q, β는 조화수열을 이루므로 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{2}{q}$에서

$q=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{6}{-6}=-1$

따라서 이차항의 계수가 1이고 -3, -1을 두 근으로 하는 이차방정식은 $(x+3)(x+1)=0$ $\therefore$ $\boldsymbol{x^2+4x+3=0}$

11 Action $a_{15}+a_{16}+\cdots+a_{50}=S_{50}-S_{14}$를 이용한다.

$S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}=50$에서 $2a+9d=10$ ……㉠

$S_{20}=\frac{20(2a+19d)}{2}=300$에서 $2a+19d=30$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $d=2$

이때 $a_{15}+a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{50}=S_{50}-S_{14}$에서

$S_{50}=\frac{50\{2\times(-4)+2(50-1)\}}{2}=2250$,

$S_{14}=\frac{14\{2\times(-4)+2(14-1)\}}{2}=126$이므로

$S_{50}-S_{14}=2250-126=\boldsymbol{2124}$

다른 풀이

$a=-4$, $d=2$에서

$a_{15}=a+14d=-4+14\times2=24$

$a_{50}=a+49d=-4+49\times2=94$

이때 a_{15}부터 a_{50}까지의 항은 36개이므로

$a_{15}+a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{50}=\frac{36(24+94)}{2}=2124$

12 Action 좀 더 간단한 경우, 예를 들어 1부터 20까지의 자연수에 대하여 이와 같은 시행을 하였을 때 남아 있는 수를 통해 규칙을 알아본다.

1부터 100까지의 자연수 중

1회의 시행에서 남은 수들은 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, …, 99

2회의 시행에서 남은 수들은 1, 5, 9, 13, 17, …, 97

3회의 시행에서 남은 수들은 1, 9, 17, 25, …, 97

4회의 시행에서 남은 수들은 1, 17, 33, …, 97

따라서 4회의 시행에서 남은 수들의 수열은 첫째항이 1이고 공차가 16인 등차수열을 이룬다.

$\therefore a_n=1+(n-1)\times16=16n-15$

이때 $16n-15=97$에서 $n=7$

즉 이 수열에서는 100 이하의 자연수인 항이 1부터 97까지 7개가 있으므로 구하는 합 S_7은 $S_7=\frac{7(1+97)}{2}=\boldsymbol{343}$

13 Action 직선에서 같은 간격만큼 떨어진 점들의 좌표는 등차수열을 이룬다.

주어진 그림에서

$y_1=kx_1+3$, $y_2=kx_2+3$, …, $y_{10}=kx_{10}+3$이므로

$x_1=\frac{y_1-3}{k}$, $x_2=\frac{y_2-3}{k}$, …, $x_{10}=\frac{y_{10}-3}{k}$ ……㉠

그런데 x_1, x_2, …, x_{10}은 같은 간격으로 잡은 점의 x좌표이므로 등차수열을 이룬다.

따라서 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=35$에서 $\frac{10(x_1+x_{10})}{2}=35$

이 식에 ㉠을 대입하면

$\frac{10\left(\frac{y_1-3}{k}+\frac{y_{10}-3}{k}\right)}{2}=35$ $\therefore$ $\frac{y_1+y_{10}-6}{k}=7$

이때 $y_1=5$, $y_{10}=15$이므로

$\frac{5+15-6}{k}=7$, $\frac{14}{k}=7$ $\therefore k=\boldsymbol{2}$

다른 풀이

$(y_1+y_2+\cdots+y_{10})=k(x_1+x_2+\cdots+x_{10})+3\times10$이므로

$\frac{10(y_1+y_{10})}{2}=35k+30$

이때 $y_1=5$, $y_{10}=15$이므로

$100=35k+30$, $35k=70$ $\therefore k=2$

14 Action 중심각의 크기가 같은 부채꼴에서 호의 길이의 비는 반지름의 길이의 비와 같다.

닮은 부채꼴에서 호의 길이의 비는 반지름의 길이의 비와 같으므로 B열의 좌석 수를 x라고 하면

$6:12=7:x$ $\therefore x=14$

C열의 좌석 수를 y라고 하면

$6:12=8:y$ $\therefore y=16$

이와 같이 생각하면 A열에서 J열까지 각 열의 좌석 수는 첫째항이 12, 공차가 2, 항수가 10인 등차수열을 이룬다.

이때 음악홀의 전체 좌석 수를 S_{10}이라 하면

$S_{10}=\frac{10(2\times12+9\times2)}{2}=\boldsymbol{210}$

15 Action 주어진 등차수열이 제 몇 항까지 양수이고 제 몇 항부터 음수인지 생각한다.

첫째항이 20이므로 공차를 d라고 하면 $a_7=2$에서

$20+6d=2$ $\therefore d=-3$

$a_n=20+(n-1)\times(-3)=-3n+23$이므로

$-3n+23>0$ $\therefore n<\frac{23}{3}=7.66\times\times$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$은 제7항까지는 양수이고 제8항부터는 음수이다.

이때 $a_1=20$, $a_7=2$, $a_8=-1$, $a_{15}=-22$이므로
$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{15}|$
$=a_1+a_2+\cdots+a_7-(a_8+a_9+\cdots+a_{15})$
$=\frac{7(20+2)}{2}-\frac{8(-1-22)}{2}$
$=77+92=\mathbf{169}$

16 Action 수열의 합과 일반항의 관계를 이용한다.
수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, S_n'이라고 하면 $S_n=n^2+kn$, $S_n'=2n^2-n$이므로
$a_5=S_5-S_4=(5^2+5k)-(4^2+4k)=9+k$
$b_5=S_5'-S_4'=(2\times5^2-5)-(2\times4^2-4)=17$
이때 $a_5=b_5$이므로
$9+k=17$ $\therefore k=\mathbf{8}$

다른 풀이
$S_n=n^2+kn$에서
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2+kn-\{(n-1)^2+k(n-1)\}$
$=2n+k-1$
$S_n'=2n^2-n$에서
$b_n=S_n'-S_{n-1}'$
$=2n^2-n-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$
$=4n-3$
$a_5=b_5$에서
$2\times5+k-1=4\times5-3$ $\therefore k=\mathbf{8}$

참고
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n을 이용하여 a_n을 구할 때는 $n\geq2$일 때와 $n=1$일 때로 경우를 나누어 구해야 하지만, S_n이 상수항이 없는 이차식일 때는 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등차수열을 이루므로 굳이 경우를 나누어 a_n을 구하지 않아도 된다. 또 이 문제는 일반항을 구하는 문제가 아니라 a_5를 이용하는 문제이므로 경우를 나누어 a_n을 구할 필요가 전혀 없다.

2. 등비수열

개념 강화 드릴 본문 173쪽

01 (1) $2\div(-1)=-2$, $-4\div2=-2$이므로 주어진 수열은 공비가 -2인 등비수열이다.
$\therefore -1, 2, -4, \mathbf{8}, \mathbf{-16}, 32$

(2) $\frac{9}{2}\div3=\frac{3}{2}$, $\frac{27}{4}\div\frac{9}{2}=\frac{3}{2}$, $\frac{81}{8}\div\frac{27}{4}=\frac{3}{2}$이므로 주어진 수열은 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다.
$\therefore 3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \frac{81}{8}, \mathbf{\frac{243}{16}}, \mathbf{\frac{729}{32}}$

(3) $32\div128=\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, $(-4)\div32=-\frac{1}{8}=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$이므로 주어진 수열은 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.
$\therefore 128, \mathbf{-64}, 32, \mathbf{-16}, 8, -4$

참고
(3)에서 $a_1=128$, $a_3=32$일 때, $a_3\div a_1=r^2=\frac{1}{4}$에서 $r=\frac{1}{2}$인지, $r=-\frac{1}{2}$인지 알 수 없다.
하지만 $a_6=-4$이므로 $a_6\div a_3=r^3=-\frac{1}{8}$에서 $r=-\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

02 (1) $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \cdots$은 첫째항이 $\frac{1}{16}$, 공비가 2인 등비수열이므로
$a_n=\frac{1}{16}\times2^{n-1}=2^{-4}\times2^{n-1}=\mathbf{2^{n-5}}$
이때 $a_{10}=2^{10-5}=2^5=\mathbf{32}$

(2) $\frac{81}{256}, \frac{27}{128}, \frac{9}{64}, \frac{3}{32}, \cdots$은 첫째항이 $\frac{81}{256}$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로
$a_n=\frac{81}{256}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{3^4}{2^8}\times\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}=\mathbf{\frac{2^{n-9}}{3^{n-5}}}$
이때 $a_{10}=\frac{2^{10-9}}{3^{10-5}}=\frac{2}{3^5}=\mathbf{\frac{2}{243}}$

03 (1) 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면
$a_2=192$에서 $ar=192$ ····· ㉠
$a_5=-3$에서 $ar^4=-3$ ····· ㉡
㉡에 ㉠을 대입하면
$192r^3=-3$, $r^3=-\frac{1}{64}=\left(-\frac{1}{4}\right)^3$ $\therefore r=\mathbf{-\frac{1}{4}}$
$r=-\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $-\frac{1}{4}a=192$ $\therefore a=\mathbf{-768}$

(2) 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_5=-9$에서 $ar^4=-9$ …… ㉠

$a_6=-6$에서 $ar^5=-6$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$-9r=-6$ $\therefore r=\frac{2}{3}$

$r=\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면

$a\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=-9$ $\therefore a=-\frac{729}{16}$

(3) 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=5$에서 $ar^2=5$ …… ㉠

$a_8=160$에서 $ar^7=160$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$5r^5=160$, $r^5=32=2^5$ $\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$4a=5$ $\therefore a=\frac{5}{4}$

04 (1) 2, 16의 등비중항을 a라고 하면 $a^2=2\times16$에서

$a=\pm\sqrt{2\times16}=\pm\sqrt{32}=\pm4\sqrt{2}$

(2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$의 등비중항을 b라고 하면 $b^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$에서

$b=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{1}{8}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

05 (1) 주어진 수열은 첫째항이 4이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$

(2) 주어진 수열은 첫째항이 20이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=20\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{5}{2^{n-3}}$

LECTURE 등비수열을 표현하는 방법

$a_{n+1}=ra_n$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

$\Longleftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

$\Longleftrightarrow$ 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열

06 (1) 첫째항이 1, 공비가 -2인 등비수열이므로

$S_{10}=\frac{1\times\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=\frac{-1023}{3}=-341$

(2) 첫째항이 $\frac{1}{16}$, 공비가 2인 등비수열이므로

$S_{10}=\frac{1}{16}\times\frac{2^{10}-1}{2-1}=\frac{1023}{16}$

(3) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열이므로

$S_{10}=\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{10^{10}-1}{9\times10^9}$

07 (1) $S_n=3\times2^n-3$에서

(i) $a_n=S_n-S_{n-1}=(3\times2^n-3)-(3\times2^{n-1}-3)$

$=3(2^n-2^{n-1})=3\times2^{n-1}$ $(n\geq2)$ …… ㉠

(ii) $a_1=S_1=3\times2-3=3$

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같다.

$\therefore a_n=3\times2^{n-1}$

(2) $S_n=3\times2^n-2$에서

(i) $a_n=S_n-S_{n-1}=(3\times2^n-2)-(3\times2^{n-1}-2)$

$=3(2^n-2^{n-1})=3\times2^{n-1}$ $(n\geq2)$ …… ㉠

(ii) $a_1=S_1=3\times2-2=4$

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않다.

$\therefore a_1=4$, $a_n=3\times2^{n-1}$ $(n\geq2)$

개념 다시보기 수열의 합과 일반항의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라고 하면

❶ $a_1=S_1$ ❷ $a_n=S_n-S_{n-1}$ (단, $n\geq2$)

08 (1)의 수열은 첫째항부터 등비수열을 이루지만, (2)의 수열은 $a_n=S_n-S_{n-1}$에 $n=1$을 대입한 값이 $a_1=S_1$의 값과 다르므로 둘째항부터 등비수열을 이룬다.

LECTURE 등비수열의 합과 일반항

일반적으로 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n이 $S_n=ar^n+b$의 꼴일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=(ar^n+b)-(ar^{n-1}+b)$

$=a(r-1)r^{n-1}$ (단, $n\geq2$)

이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다. 그런데 이 수열의 첫째항 a_1은 $a_1=S_1$에서 $ar+b$이고, 이 값이 $ar-a$와 같으면, 즉 $a+b=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이루고, 그렇지 않으면 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등비수열을 이룬다.

09 수열 2^9, $2^8\times3$, $2^7\times3^2$, …, 2×3^8, 3^9에서 $\frac{2^8\times3}{2^9}=\frac{3}{2}$이므로 이 수열은 첫째항이 2^9이고 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다.

$\therefore S_{10}=\frac{2^9\times\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{10}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}=2^{10}\times\left(\frac{3^{10}}{2^{10}}-1\right)=3^{10}-2^{10}$

확인 문제 본문 174~184 쪽

1-1 Action 주어진 식을 첫째항 a와 공비 r를 이용하여 나타낸다.

(1) $a_1+a_2=3$에서 $a+ar=a(1+r)=3$ ……㉠

$a_3+a_4=12$에서 $ar^2+ar^3=a(1+r)r^2=12$ ……㉡

㉡÷㉠에서 $r^2=4$이므로

$a_5+a_6=ar^4+ar^5=a(1+r)r^4$

$=a(1+r)r^2\cdot r^2=12\times4=\mathbf{48}$

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 a_1+a_2, a_3+a_4, a_5+a_6, …도 등비수열을 이룬다. 이때 $(a_3+a_4)\div(a_1+a_2)=12\div3=4$에서 수열 a_1+a_2, a_3+a_4, a_5+a_6, …은 공비가 4인 등비수열이므로

$a_5+a_6=(a_3+a_4)\times4=12\times4=48$

LECTURE 등비수열의 부분합

첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}$

$S_{2n}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$

$=ar^n+ar^{n+1}+\cdots+ar^{2n-1}$

$=(a+ar+\cdots+ar^{n-1})r^n=S_n\cdot r^n$

$S_{3n}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}$

$=ar^{2n}+ar^{2n+1}+\cdots+ar^{3n-1}$

$=(a+ar+\cdots+ar^{n-1})r^{2n}=S_n\cdot(r^n)^2$

……

즉 수열 S_n, $S_{2n}-S_n$, $S_{3n}-S_{2n}$, …은 첫째항이 S_n이고 공비가 r^n인 등비수열을 이룬다.

(2) $a=a_1=1$이므로

$a_n=ar^{n-1}=243$에서 $r^{n-1}=243$ ……㉠

$a_{2n-3}=ar^{2n-4}=6561$에서 $r^{2n-4}=6561$ ……㉡

㉡÷㉠에서 $r^{n-3}=27$ ……㉢

㉠÷㉢에서 $r^2=9$이고 이를 ㉡에 대입하면

$r^{2n-4}=r^{2(n-2)}=9^{n-2}=6561=9^4$

따라서 $\boldsymbol{n=6}$이고 이를 다시 ㉠에 대입하면

$r^5=243=3^5$ ∴ $\boldsymbol{r=3}$

다른 풀이

$a=1$이므로 $a_n=243$에서 $r^{n-1}=243$ ……㉠

$a_{2n-3}=6561$에서 $r^{2n-4}=6561$ ……㉡

이때 $r^{2n-4}=(r^{n-1})^2\times r^{-2}$이므로 ㉠을 ㉡에 대입하면

$6561=243^2\times r^{-2}$, $r^2=\dfrac{243^2}{6561}=\dfrac{3^{5\times2}}{3^8}=3^2$

∴ $r=-3$ 또는 $r=3$

그런데 ㉠에서 $r^{n-1}=3^5$이므로 $r=3$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $3^{n-1}=3^5$에서 $n-1=5$ ∴ $n=6$

1-2 Action $\{a_n\}$이 등비수열이면 $\{\log a_n\}$은 등차수열을 이룬다.

$a_2=ar$이므로 $\log a_2=\dfrac{1}{2}$에서

$\log ar=\log a+\log r=\dfrac{1}{2}$ ……㉠

$a_4=ar^3$이므로 $\log a_4=\dfrac{5}{2}$에서

$\log ar^3=\log a+3\log r=\dfrac{5}{2}$ ……㉡

㉡−㉠에서 $2\log r=2$ ∴ $\log r=1$

이를 ㉠에 대입하면 $\log a=-\dfrac{1}{2}$

이때 $\log(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{11})=\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_{11}$은 첫째항이 $\log a=-\dfrac{1}{2}$이고 공차가 $\log r=1$인 등차수열의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$$\log(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{11})=\frac{11\left\{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(11-1)\times1\right\}}{2}$$

$$=\frac{11\times9}{2}=\frac{\mathbf{99}}{\mathbf{2}}$$

참고

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$\log a_n=\log ar^{n-1}=\log a+(n-1)\log r$이므로

수열 $\{\log a_n\}$은 첫째항이 $\log a$이고 공차가 $\log r$인 등차수열이다.

셀파 특강 확인 01 본문 175 쪽

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=45$에서 $ar^2=45$ ……㉠

$a_5=405$에서 $ar^4=405$ ……㉡

㉡÷㉠에서 $r^2=9$ ∴ $r=3$($\because a_n>0$)

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $a=5$

∴ $a_n=5\cdot3^{n-1}$

이때 $5\cdot3^{n-1}>10^6$에서 양변에 상용로그를 취하면

$\log5\cdot3^{n-1}>\log10^6$, $\log5+(n-1)\log3>6$

$(n-1)\log3>6-\log5$

$$n-1>\frac{6-\log5}{\log3}=\frac{6-0.6990}{0.4771}=\frac{5.3010}{0.4771}=11.1\times\times\times$$

∴ $n>12.1\times\times\times$

$\log5=\log\frac{10}{2}=1-\log2=0.6990$

따라서 처음으로 10^6보다 커지는 항은 제**13**항이다.

개념 다시보기 로그의 성질

$a\neq1$, $a>0$, $M>0$, $N>0$일 때

❶ $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

❷ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

02-1 Action $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$이다.

다항식 $f(x)=x^3-3x+k$를 일차식 $x+1$, x, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$이고, 이 순서로 등비수열을 이루므로

$\{f(0)\}^2=f(-1)\times f(2)$

이때 $f(0)=k$, $f(-1)=-1+3+k=2+k$,

$f(2)=8-6+k=2+k$이므로

$k^2=(2+k)(2+k)$, $k^2=(k+2)^2$

$4k+4=0$ $\therefore k=-1$

개념 다시보기 나머지정리

x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눌 때의 나머지는 $P(\alpha)$이다.

02-2 Action 세 근을 α, β, γ라 하고 근과 계수의 관계를 이용한다.

삼차방정식 $x^3-kx^2-54x+216=0$의 세 근을 α, β, γ라 하고 이 순서로 등비수열을 이룬다고 하자.

삼차방정식의 근과 계수의 관계로부터

$\alpha+\beta+\gamma=k$ ····· ㉠

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-54$ ····· ㉡

$\alpha\beta\gamma=-216$ ····· ㉢

또 α, β, γ가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$\beta^2=\alpha\gamma$ ····· ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$\beta^3=-216=(-6)^3$에서 $\beta=-6$ ····· ㉤

㉤을 ㉡에 대입하면 $-6\alpha-6\gamma+\gamma\alpha=-54$이고

㉤을 ㉣에 대입하면 $\alpha\gamma=(-6)^2=36$이므로

$-6(\alpha+\gamma)+36=-54$, $-6(\alpha+\gamma)=-90$

$\therefore \alpha+\gamma=15$

㉠에서 $k=\alpha+\beta+\gamma$이므로 $k=15-6=9$

LECTURE

확인 문제 02-1 에서는 등비수열을 이루는 세 수가 $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$인 것을 알 수 있다. 하지만 **확인 문제** 02-2에서는 등비수열을 이루는 세 수가 주어진 삼차방정식의 세 근이라는 것 밖에 알지 못한다. 따라서 삼차방정식의 세 근을 α, β, γ로 놓고, 근과 계수의 관계로부터 얻은 식과 등비중항으로 얻은 식을 이용해 방정식을 풀어야 하지만 상당히 복잡하다. 이와 같이 구체적인 값을 알 수 없는 어떤 세 수가 등비수열을 이룬다고 주어지면, 등비중항을 이용하여 문제를 푸는 것이 틀린 것은 아니지만 이보다 0이 아닌 실수 a, r에 대하여 a, ar, ar^2이 등비수열을 이룬다는 것을 이용해 푸는 것이 더 좋다.

따라서 앞으로 이와 같은 문제는 다음 **다른 풀이**와 같은 방법으로 풀도록 한다.

다른 풀이

삼차방정식 $x^3-kx^2-54x+216=0$의 세 근이 등비수열을 이루므로 세 근을 a, ar, ar^2으로 놓으면, 삼차방정식의 근과 계수의 관계로부터

$a+ar+ar^2=k$ ····· ㉠

$a(ar)+(ar)(ar^2)+(ar^2)a=-54$ ····· ㉡

$a(ar)(ar^2)=-216$ ····· ㉢

㉢에서 $a(ar)(ar^2)=(ar)^3=-216=(-6)^3$

즉 $ar=-6$이고, 이 값을 ㉡에 대입하면

$-6(a+ar+ar^2)=-54$ $\therefore a+ar+ar^2=9$

따라서 ㉠에서 $k=9$

03-1 Action 닮음인 두 도형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱과 같다.

안쪽 원의 반지름의 길이는 바깥쪽 원의 $\frac{3}{4}$이므로 그 넓이는 바깥쪽 원의 $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$(배)이다.

새로 그려지는 동심원들의 넓이를 a_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 맨 처음 그려지는 원의 넓이인 $100\times\frac{9}{16}$이고, 공비가 $\frac{9}{16}$인 등비수열을 이룬다.

이때 처음 원 안쪽에 10개의 원을 차례로 그렸으므로 맨 안쪽에 있는 원의 넓이는 이 수열의 10번째 항이고, 그 값은

$100\times\frac{9}{16}\times\left(\frac{9}{16}\right)^9=100\times\left(\frac{9}{16}\right)^{10}$

오답 피하기

맨 처음 원 안에 10개의 원을 더 그렸으므로 모두 11개의 원이 있게 된다. 이때 맨 처음 원의 넓이를 첫째항으로 하면 맨 안쪽 원의 넓이는 11번째 항이다. 따라서 처음에 그려져 있는 원의 넓이를 첫째항으로 놓고, 10번째로 그려지는 원의 넓이를 10번째 항으로 생각해서 $100\times\left(\frac{9}{16}\right)^9$으로 답하지 않도록 주의한다.

04-1 Action K시의 9년 전 인구를 기준으로 식을 세운다.

K시의 인구는 매년 일정한 비율로 증가했으므로 9년 전 인구를 A라 하고 인구 증가율을 r라 하면 8년 전 인구는 $A(1+r)$, 7년 전 인구는 $A(1+r)^2$, …, 현재 인구는 $A(1+r)^9$이다.

그런데 9년 만에 인구가 2배로 증가하였으므로

$A(1+r)^9=2A$에서 $(1+r)^9=2$ ····· ㉠

㉠의 양변에 상용로그를 취하면 $\log(1+r)^9=\log 2$

$9\log(1+r)=0.3010$ ($\log 2=0.3010$)

$\log(1+r)=\frac{0.3010}{9}\fallingdotseq 0.0334$

이때 $\log 1.08=0.0334$이므로 $1+r=1.08$ $\therefore r=0.08$

따라서 지난 9년 동안 K시 인구의 평균 증가율은 **8 %**이다.

LECTURE 72의 규칙

매회 일정한 비율 $r(\%)$로 증가할 때, 처음의 양이 2배가 되는 데 걸리는 기간(횟수)은 $72 \div r$의 값과 같다는 것으로 근삿값을 구하는데 아주 편리하게 이용할 수 있다. 이를테면 **확인 문제** 4-1의 문제에서 K시의 인구는 일정한 비율로 증가하여 인구가 9년 만에 2배로 되었으므로 K시 인구의 평균 증가율 r는 $72 \div r = 9$에서 $r = 8(\%)$을 쉽게 알 수 있다.
72의 규칙을 이용하면 K시 인구의 평균 증가율에 따라 K시 인구가 2배가 되는 데 걸리는 기간은 다음과 같다.

매년 5 %로 증가 ⇨ 약 14.4년 후 인구가 2배
매년 6 %로 증가 ⇨ 약 12년 후 인구가 2배
매년 7 %로 증가 ⇨ 약 10.3년 후 인구가 2배
매년 8 %로 증가 ⇨ 약 9년 후 인구가 2배
매년 9 %로 증가 ⇨ 약 8년 후 인구가 2배
매년 10 %로 증가 ⇨ 약 7.2년 후 인구가 2배
……

하지만 72의 규칙을 이용하지 않고 상용로그를 이용해 2배가 되는 데 걸리는 기간을 구하는 것이 정확한 방법이다. 이때 $\log 2 = 0.3010$과 $\log 1.05 = 0.0212$, $\log 1.06 = 0.0253$, $\log 1.07 = 0.0294$, $\log 1.08 = 0.0334$, $\log 1.09 = 0.0374$, $\log 1.10 = 0.0414$를 이용하여 실제로 구해보면 다음과 같다.

매년 5 %로 증가 ⇨ 약 14.2년 후 인구가 2배
매년 6 %로 증가 ⇨ 약 11.89년 후 인구가 2배
매년 7 %로 증가 ⇨ 약 10.23년 후 인구가 2배
매년 8 %로 증가 ⇨ 약 9.01년 후 인구가 2배
매년 9 %로 증가 ⇨ 약 8.05년 후 인구가 2배
매년 10 %로 증가 ⇨ 약 7.27년 후 인구가 2배
……

이와 같이 일정한 비율 $r(\%)$로 증가할 때 72의 규칙을 사용하여 현재의 2배가 되는 시점을 구하는 것과 상용로그를 이용하여 그 시점을 구한 값이 비슷하다. 하지만 실제 문제에서는 대부분 몇 년 후(자연수)인지를 묻는 경우가 많은데 이때 아주 작은 차이로 1년의 차이가 생길 수 있다는 점을 주의해야 한다. 결국 정확한 답을 구하려면 상용로그를 이용해야 한다. 특히 증가율이 8 %, 9 %일 때는 반드시 상용로그의 계산에서 답을 확인해야 한다.

※ 72의 규칙은 근삿값을 구하는 것이므로 증가율의 값에 따라 실제 값과 조금 차이가 생긴다. 실제로 증가율이 약 8 %일 때 2배가 되는 시점이 실제로 구한 값과 가장 비슷하게 나오고, 증가율이 8 %보다 작으면 작을수록 2배가 되는 시점이 점점 더 길어지며, 증가율이 8 %보다 크면 클수록 2배가 되는 시점이 점점 더 짧아진다.

4-2 Action K시의 인구가 매년 r %씩 증가한다고 하고 식을 세운다.

K시의 인구를 a(만 명)라 하고, 매년 r %씩 증가한다고 하자.
5년 후 K시의 인구가 20(만 명)이 되므로
$a(1+r)^5 = 20$ …… ㉠
15년 후 K시의 인구가 30(만 명)이 되므로
$a(1+r)^{15} = 30$ …… ㉡
이때 $a(1+r)^{15} = a(1+r)^5(1+r)^{10}$이므로
㉠을 ㉡에 대입하면
$20(1+r)^{10} = 30$에서 $(1+r)^{10} = \frac{3}{2}$
$\therefore (1+r)^5 = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
따라서 K시의 10년 후의 인구는
$a(1+r)^{10} = a(1+r)^5(1+r)^5 = 20(1+r)^5$
$= 20 \times \frac{\sqrt{6}}{2} = 24.5$(만 명)
즉 **24만 5천 명**이다.

다른 풀이

n년 후 K시의 인구를 a_n(만 명)이라고 하면 K시의 인구는 매년 일정한 비율로 증가하므로 a_n은 등비수열을 이룬다.
따라서 a_5, a_{10}, a_{15}도 등비수열을 이루고, $a_5 = 20$, $a_{15} = 30$이므로 등비중항을 이용하면
$a_{10} = \sqrt{a_5 \times a_{15}} = \sqrt{20 \times 30} = 10\sqrt{6} \fallingdotseq 24.5$
즉 K시의 10년 후의 인구는 24만 5천 명이다.

5-1 Action $\{a_n\}$이 등비수열이면 $\{a_{2n-1}\}$도 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이므로
$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
이때 $a_{2n-1} = 3 \cdot 2^{(2n-1)-1} = 3 \cdot 2^{2(n-1)} = 3 \cdot 4^{n-1}$
따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 3이고 공비가 4인 등비수열이다.
$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{3(4^5-1)}{4-1} = 2^{10} - 1 = \mathbf{1023}$

참고

$\{a_n\}$이 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열이면 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 a_1, a_3, a_5, …이므로 첫째항이 $a_1 = a$이고 공비가 r^2인 등비수열이다.

5-2 Action 첫째항과 공비를 구한다.

주어진 수열의 첫째항 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$에서 이중근호를 풀면 $\sqrt{2}-1$이고, 공비는 $\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2(3-2\sqrt{2})}{3-2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$에서 $\sqrt{2}$이다.
따라서 이 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은
$\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}^{10}-1)}{\sqrt{2}-1} = 2^5 - 1 = \mathbf{31}$

다른 풀이

각 항의 이중근호를 풀면 $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{4}-\sqrt{2}$, $\sqrt{8}-\sqrt{4}$, …이다.
따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은
$(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{8}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{2^{10}}-\sqrt{2^9})$에서 이웃한 항끼리 소거하면
$\sqrt{2^{10}}-1=2^5-1=31$

개념 다시보기 이중근호 풀기

❶ $a>0, b>0$일 때, $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

❷ $a>b>0$일 때, $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

6-1 Action S_{10}, $S_{20}-S_{10}$, $S_{30}-S_{20}$이 등비수열을 이루는 것을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면 S_{10}, $S_{20}-S_{10}$, $S_{30}-S_{20}$은 공비가 r^{10}인 등비수열을 이룬다.
이때 $S_{10}=10$, $S_{30}=310$이므로 10, $S_{20}-10$, $310-S_{20}$은 등비수열을 이룬다. 그러므로 등비중항을 이용하면
$(S_{20}-10)^2=10\times(310-S_{20})$
$S_{20}^2-20S_{20}+100=3100-10S_{20}$
$S_{20}^2-10S_{20}-3000=0$, $(S_{20}+50)(S_{20}-60)=0$
$\therefore S_{20}=\mathbf{60}$ ($\because$ 공비가 양수이므로 $S_{20}>0$)

다른 풀이

첫째항을 a, 공비를 $r(r>0)$라고 하면
$S_{10}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=10$ …… ㉠
$S_{30}=\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}$
$=\dfrac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}=310$ …… ㉡
㉡÷㉠에서 $r^{20}+r^{10}+1=31$이므로
$r^{20}+r^{10}-30=0$, $(r^{10}+6)(r^{10}-5)=0$
이때 $r>0$에서 $r^{10}>0$이므로 $r^{10}=5$
$\therefore S_{20}=\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}$
$=10(5+1)=60$

6-2 Action S_{10}, $S_{20}-S_{10}$, $S_{30}-S_{20}$의 값을 알면 $S_{30}=(S_{30}-S_{20})+(S_{20}-S_{10})+S_{10}$으로 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하자.
$S_n=4$, $S_{3n}-S_{2n}=36$이고 S_n, $S_{2n}-S_n$, $S_{3n}-S_{2n}$은 등비수열을 이룬다. 그러므로 등비중항을 이용하면
$S_{2n}-S_n=\sqrt{S_n\times(S_{3n}-S_{2n})}=\sqrt{4\times36}=12$
$\therefore S_{3n}=S_n+(S_{2n}-S_n)+(S_{3n}-S_{2n})=4+12+36=\mathbf{52}$

다른 풀이

$S_n=4$에서 $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=4$이므로
$S_{2n}=\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}=4(r^n+1)$,
$S_{3n}=\dfrac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}=4(r^{2n}+r^n+1)$
이때 $S_{3n}-S_{2n}=36$에서
$4(r^{2n}+r^n+1)-4(r^n+1)=4r^{2n}=36$
$\therefore r^n=3$ ($\because r>0$)
$\therefore S_{3n}=4\times(3^2+3+1)=52$

셀파 특강 **확인 02** 본문 181 쪽

(1) $\log_2(S_n-1)=n$에서
$S_n-1=2^n$ $\therefore S_n=2^n+1$
(i) $a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(2^n+1)-(2^{n-1}+1)$
$=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$ …… ㉠
(ii) $a_1=S_1=2+1=3$
이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같지 않다.
$\therefore \boldsymbol{a_1=3}$, $\boldsymbol{a_n=2^{n-1}(n\geq2)}$

(2) $S_n=5^{n+1}-k$에서
(i) $a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(5^{n+1}-k)-(5^n-k)$
$=5^{n+1}-5^n=4\cdot5^n(n\geq2)$ …… ㉠
(ii) $a_1=S_1=5^2-k=25-k$ …… ㉡
따라서 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 ㉡이 같아야 하므로
$4\cdot5^1=25-k$에서 $k=25-20=\mathbf{5}$

다른 풀이

$S_n=5^{n+1}-k=5\cdot5^n-k$에서 계수의 합이 0이면, 즉 $5-k=0$이면 등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.
$\therefore k=5$

7-1 Action 등비수열의 합을 구하는 공식에 대입하여 n값의 범위를 구한다.

첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n=\dfrac{3\cdot(2^n-1)}{2-1}=3\cdot2^n-3$이므로
$3\cdot2^n-3>1000$에서
$2^n>\dfrac{1003}{3}\fallingdotseq334.33$
이때 $2^8=256$, $2^9=512$이므로 주어진 식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 **9**이다.

07-2 Action 등비수열의 합을 구하는 공식에 대입하여 n값의 범위를 구한다.

$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}$는 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이다.

$$\therefore 2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}=\frac{2\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=3\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

이때 $\left|3\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-3\right|<\frac{1}{10000}$에서

$\frac{1}{3^{n-1}}<\frac{1}{10000}$, $3^{n-1}>10000$

$3^8=6561<10000$, $3^9=19683>10000$이므로

$n-1\geq 9$ $\quad\therefore n\geq 10$

따라서 주어진 식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 **10**이다.

LECTURE 지수부등식 풀기

이 문제의 계산 과정 중 $3^{n-1}>10000$과 같이 지수부등식이 나온다. 이 문제에서는 n 대신 수를 차례로 대입해서 부등식을 만족시키는 n의 값을 구했지만 숫자가 너무 커지면 직접 대입해서 구할 수는 없고 양변에 상용로그를 취해 부등식을 해결해야 한다.

양변에 상용로그를 취하면 $\log 3^{n-1}>\log 10000$에서

$(n-1)\log 3>\log 10^4$, $n-1>\frac{4}{\log 3}=\frac{4}{0.4771}\fallingdotseq 8.4$

따라서 $n>9.4$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 최소의 자연수는 10이다.

08-1 Action $a=10$만 원, $r=0.005$, $n=36$을 공식에 대입한다.

다음은 매월 초에 적립하는 금액 각각에 대한 원리합계를 정리한 것이다.

1월 초	10^5원				
2월 초		10^5원			
⋮					
35월 초			…	10^5원	
36월 초					10^5원
적립 기간	36개월	35개월		2개월	1개월
원리합계	$10^5\times 1.005^{36}$	$10^5\times 1.005^{35}$	…	$10^5\times 1.005^2$	$10^5\times 1.005^1$

이때 원리합계의 총합을 S라 하면

$$S=\frac{10^5\times 1.005\times(1.005^{36}-1)}{1.005-1}$$

$$=\frac{100500\times(1.19-1)}{0.005}$$

$=100500\times 0.19\times 200=$ **3,819,000**(원)

08-2 Action 매년 적립하는 금액을 a만 원이라 하고 14년 후 원리합계를 생각한다.

오늘 적립하는 a만 원 ⇨ 14년 후 $a\times 1.05^{14}$만 원

1년 후 적립하는 a만 원 ⇨ 13년 후 $a\times 1.05^{13}$만 원

……

13년 후 적립하는 a만 원 ⇨ 1년 후 $a\times 1.05^{1}$만 원

이때 14년 동안 연이율 5 %의 복리로 매년 같은 날 a만 원씩 적립한 적립금의 원리합계가 1000만 원이므로

$$\frac{a\times 1.05(1.05^{14}-1)}{1.05-1}=1000$$

$$\frac{a\times 1.05(2-1)}{0.05}=1000$$

$21a=1000$

$\therefore a=\frac{1000}{21}\fallingdotseq 47.6190$(만 원)

즉 A군은 매년 **476,200**원씩 적립해야 한다.

09-1 Action 매년 갚는 금액을 a원으로 놓고 매년 갚은 돈의 원리합계가 빌린 돈의 원리합계와 같도록 한다.

(i) 구입 시점인 올해 초에 1억 원을 빌렸다면 1억 원에 대한 20년 동안의 원리합계 S_1은

$S_1=1$억$\times 1.07^{20}=1$억$\times 3.87$

$=3$억 8700만 (원)

(ii) 다음은 매년 말에 갚는 돈 a원을 적립금으로 생각하고, 이 각각에 대한 원리합계를 정리한 것이다.

1년 말	a원				
2년 말		a원			
⋮					
19년 말			…	a원	
20년 말					a원
적립 기간	19년	18년		1년	0년
원리합계	$a\times 1.07^{19}$	$a\times 1.07^{18}$	…	$a\times 1.07$	a

이때 매년 말에 a원씩 20년 동안 갚은 금액의 원리합계의 총합을 S_2라 하면

$S_2=a+a\times 1.07+a\times 1.07^2+\cdots+a\times 1.07^{19}$

$$=\frac{a(1.07^{20}-1)}{1.07-1}=\frac{a(3.87-1)}{0.07}$$

$$=\frac{287a}{7}=41a\text{(원)}$$

$S_1=S_2$이어야 하므로 $41a=3$억 8700만에서

$a=\frac{3\text{억 }8700\text{만}}{41}\fallingdotseq 9439000$

따라서 매년 갚아야 할 금액은 **943만 9천** 원이다.

기본강화 본문 186~187쪽

01 Action 등비수열의 각 항의 곱은 다시 등비수열을 이룬다.

등비수열의 각 항의 곱은 다시 등비수열을 이루므로 등비수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 곱이 이루는 등비수열을 $\{c_n\}$이라고 하면

$c_4=3$, $c_7=6$

이때 등비수열 $\{c_n\}$의 첫째항을 c, 공비를 r라고 하면

$c_4=3$에서 $cr^3=3$ …… ㉠

$c_7=6$에서 $cr^6=6$ …… ㉡

㉡÷㉠에서 $r^3=2$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $c=\frac{3}{2}$이므로

$c_{16}=cr^{15}=c(r^3)^5=\frac{3}{2}\times 2^5=48$ $\therefore a_{16}b_{16}=\mathbf{48}$

LECTURE **두 등비수열의 각 항의 곱으로 이루어진 수열**

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a, 공비가 r이고

등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 b, 공비가 s이면

두 등비수열의 각 항의 곱으로 이루어진 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 ab이고, 공비가 rs인 등비수열을 이룬다.

02 Action 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$\log_4 a_2=\frac{1}{2}$에서 $a_2=4^{\frac{1}{2}}=2$ $\therefore ar=2$ …… ㉠

$\log_4 a_5=2$에서 $a_5=4^2=16$ $\therefore ar^4=16$ …… ㉡

㉡÷㉠에서 $r^3=8$, 즉 $r=2$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $a=1$이다.

따라서 $a_n=2^{n-1}$이므로

$a_1a_2a_3\cdots a_{10}=1\cdot 2\cdot 2^2\cdot\cdots\cdot 2^9=2^{1+2+3+\cdots+9}=2^{45}$

$\therefore \log_4 a_1a_2a_3\cdots a_{10}=\log_4 2^{45}=\log_{2^2} 2^{45}$

$=\frac{45}{2}\log_2 2=\mathbf{\frac{45}{2}}$

03 Action 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_5=\frac{3}{16}$에서 $ar^4=\frac{3}{16}$ …… ㉠

$a_8=\frac{3}{128}$에서 $ar^7=\frac{3}{128}$ …… ㉡

㉡÷㉠에서 $r^3=\frac{1}{8}$, 즉 $r=\frac{1}{2}$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $a=3$

따라서 $a_n=\frac{3}{2^{n-1}}$이므로 $\frac{3}{2^{n-1}}<0.001$에서 $2^{n-1}>3000$

양변에 상용로그를 취하면

$(n-1)\log 2>3+\log 3$

$\therefore n>\frac{3+\log 3}{\log 2}+1=\frac{3.4771}{0.3010}+1\fallingdotseq 12.55$

따라서 처음으로 0.001보다 작아지는 항은 제 **13** 항이다.

04 Action 공비 r를 구하면 l, m, n의 값을 알 수 있다.

이 수열 1, l, m, n, 100의 공비를 r라고 하면 첫째항이 1이고 제 5 항이 100이므로

$1\cdot r^4=100$ $\therefore r=\sqrt{10}$ ($\because r>0$)

이 등비수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\sqrt{10}^{\,n-1}=10^{\frac{n-1}{2}}$

따라서 $l=a_2=10^{\frac{1}{2}}$, $m=a_3=10$, $n=a_4=10^{\frac{3}{2}}$이므로

$\log lmn=\log 10^{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}}$

$=\log 10^3=\mathbf{3}$

다른 풀이

1, l, m, n, 100이 이 순서로 등비수열을 이루므로 1, m, 100도 이 순서로 등비수열을 이룬다. 즉

$m^2=100$ $\therefore m=10$($\because m>0$)

또한 1, l, $m(=10)$도 이 순서로 등비수열을 이루므로

$l^2=10$에서 $l=\sqrt{10}$ ($\because l>0$)

$m(=10)$, n, 100도 이 순서로 등비수열을 이루므로

$n^2=1000$에서 $n=10\sqrt{10}$ ($\because n>0$)

$\therefore \log lmn=\log\sqrt{10}\times 10\times 10\sqrt{10}$

$=\log 1000=3$

05 Action 세 근이 등비수열을 이루므로 세 근을 a, ar, ar^2으로 놓고 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

곡선 $y=x^3-3x^2-6x+5$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 삼차방정식 $x^3-3x^2-6x+5=k$의 세 근이다.

즉 $x^3-3x^2-6x+5-k=0$의 세 근이 등비수열을 이루므로 세 근을 a, ar, $ar^2(a\neq 0)$으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=3$ $\therefore a(1+r+r^2)=3$ …… ㉠

$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=-6$

$\therefore a^2r(1+r+r^2)=-6$ …… ㉡

$a\times ar\times ar^2=-5+k$ $\therefore (ar)^3=-5+k$ …… ㉢

㉡÷㉠에서 $ar=-2$이고, 이를 ㉢에 대입하면

$(-2)^3=-5+k$, $-8=k-5$ $\therefore k=\mathbf{-3}$

06 Action 주어진 조건에서 a, b, c에 대한 식을 만든다.

세 모서리의 길이가 a, b, c인 직육면체의

부피가 8이므로 $abc=8$ …… ㉠

겉넓이가 28이므로 $2(ab+bc+ca)=28$

$\therefore ab+bc+ca=14$ …… ㉡

a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $b^3=8$ $\therefore b=2$

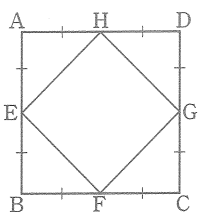
$b=2$를 ㉡, ㉢에 각각 대입하면
$2(a+c)+ac=14$, $ac=4$
즉 $2(a+c)+4=14$이므로 $a+c=5$
따라서 모든 모서리의 길이의 합은
$4(a+b+c)=4\times(2+5)=\mathbf{28}$

다른 풀이
세 모서리의 길이가 등비수열을 이루므로 세 모서리의 길이를 각각 a, ar, ar^2이라 하면
부피가 8이므로 $a\times ar\times ar^2=8$에서
$(ar)^3=8$ $\therefore ar=2$ ····· ㉠
겉넓이가 28이므로
$2(a\times ar+ar\times ar^2+a\times ar^2)=28$에서
$2a^2r(1+r+r^2)=28$ $\therefore a^2r(1+r+r^2)=14$ ····· ㉡
이때 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+ar+ar^2)$, 즉
$4a(1+r+r^2)$이고, ㉠을 ㉡에 대입하면
$2a(1+r+r^2)=14$ $\therefore 4a(1+r+r^2)=28$

평가원 기출

07 Action 세 점 P, Q, R의 좌표를 구한다.
점 $A(2, 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선의 방정식은 $x=2$
이 직선과 $y=8^x$의 그래프가 만나는 점 P의 좌표는 $(2, 8^2)$
$y=a^x$의 그래프와 만나는 점 Q의 좌표는 $(2, a^2)$
$y=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점 R의 좌표는 $(2, \log_2 2)$
이때 $\overline{AP}=8^2=64$, $\overline{AQ}=a^2$, $\overline{AR}=\log_2 2=1$이 이 순서로 등비수열을 이루므로
$(a^2)^2=64\times 1$ $\therefore a^4=\mathbf{64}$

08 Action 정사각형 A_1, A_2, A_3, …의 넓이는 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열을 이룬다.
오른쪽 그림에서 △AEH, △BFE, △CGF, △DHG는 합동인 직각이등변삼각형이므로



$\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HE}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB}$이다.
$\therefore \square EFGH=\frac{1}{2}\square ABCD$
이와 같이 생각하면
(정사각형 A_{n+1}의 넓이)$=\frac{1}{2}$(정사각형 A_n의 넓이)
이때 A_1의 넓이가 1이므로 정사각형 A_n의 넓이는 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열을 이룬다.
즉 정사각형 A_n의 넓이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로
$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{100}$, $2^{n-1}>100$, $n-1\geq 7$ $\therefore n\geq 8$
따라서 n의 최솟값은 8이다.

09 Action 자동차를 5년 전 구입했을 때의 가격을 a라 하고 현재 시세를 a로 나타낸다.
5년 전 자동차를 구입했을 때의 가격을 a(만 원)라고 하자. 이 자동차의 가격이 매년 9 %씩 하락했으므로 현재 시세는
$a(1-0.09)^5=a\times 0.91^5=0.624a$(만 원)
그런데 현재 시세가 936만 원이므로 $0.624a=936$에서
$a=\frac{936}{0.624}=\mathbf{1500}$(만 원)

오답 피하기
5년 동안 매년 9 %씩 하락해 왔으므로 5년 전 가격을 구하려면 이 과정을 거꾸로 생각해야 한다. 단, 9 % 하락의 반대를 9 % 상승이라고 생각해서 $936\times(1+0.09)^5$이라고 생각하면 안 된다. 9 % 하락은 $1-0.09=0.91$을 곱하는 것이고 그 반대는 역수를 곱하는 것인데 $\frac{1}{0.91}\fallingdotseq 1.0989$로 1.09와 다르다.

10 Action $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m=S_m-S_n$을 이용한다.
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라고 하면 $S_5=5$, $S_{10}-S_5=10$이고
S_5, $S_{10}-S_5$, $S_{15}-S_{10}$, …은 이 순서로 등비수열을 이룬다.
이때 $S_5=5$에서 이 수열의 첫째항은 5이고
$(S_{10}-S_5)\div S_5=10\div 5=2$에서 공비는 2이므로
$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=S_{15}-S_{10}$
$=5\times 2^2=\mathbf{20}$

11 Action $n\geq 2$일 때와 $n=1$일 때로 나눈다.
$S_n=3\cdot 2^n+k$에서
(i) $a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(3\cdot 2^n+k)-(3\cdot 2^{n-1}+k)$
$=3\cdot 2^{n-1}(n\geq 2)$ ····· ㉠
(ii) $a_1=S_1=3\cdot 2^1+k=6+k$ ····· ㉡
이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 $3\cdot 2^{1-1}=3$과 ㉡이 같아야 하므로
$6+k=3$ $\therefore k=\mathbf{-3}$

평가원 기출

12 Action 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 이를 이용해 S_n의 식을 구한다.
ㄱ. $a_n=2^{1-n}$에서
$\log a_n=\log 2^{1-n}=(1-n)\log 2=(n-1)(-\log 2)$
따라서 수열 $\{\log a_n\}$은 첫째항이 0, 공차가 $-\log 2$인 등차수열이다. (참)

ㄴ. $2^{1-n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}=2-2^{1-n}$$

따라서 $S_n+a_n=2-2^{1-n}+2^{1-n}=2$이므로 수열 $\{S_n+a_n\}$, 즉 $\{2\}$는 첫째항이 2, 공비가 1인 등비수열이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $S_n=2-2^{1-n}$이고

$$\frac{1}{2}a_{n+1}+2=\frac{1}{2}\cdot 2^{1-(n+1)}+2=\frac{1}{2}\cdot 2^{-n}+2=2^{-n-1}+2$$

$\therefore S_n\neq\frac{1}{2}a_{n+1}+2$ (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

LECTURE 2, 2, 2, …는 등비수열?

2, 2, 2, …와 같이 숫자가 반복되는 수열은 '첫째항이 2이고 공비가 1인 등비수열'이다. 또한 '첫째항이 2이고 공차가 0인 등차수열'이라고 해도 틀린 표현이 아니다. 따라서 이와 같이 같은 수가 반복되는 수열은 등차수열이라 할 수도 있고 등비수열이라 할 수도 있다.

13 Action 공비 r의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=4$에서 $ar^2=4$ …… ㉠

$a_5=16$에서 $ar^4=16$ …… ㉡

㉡÷㉠에서

$r^2=4$ $\therefore r=2$ ($\because r>0$) ← 모든 항이 양수이므로 공비 r도 양수

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a\cdot 2^2=4$ $\therefore a=1$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

이때 $2^n-1>1000$에서 $2^n>1001$

$\therefore n\geq 10$ ← $2^9=512$, $2^{10}=1024$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합이 처음으로 1000보다 커지는 자연수 n의 값은 10이다.

14 Action 같은 3만 원이라도 적립한 시기에 따라 적립 기간이 다르므로 2년 후 원리합계가 다르다.

첫 번째 달에 적립한 3만 원 ⇨ 24개월 후 3×1.01^{24}(만 원)

두 번째 달에 적립한 3만 원 ⇨ 23개월 후 3×1.01^{23}(만 원)

……

마지막 달에 적립한 3만 원 ⇨ 1개월 후 3×1.01^{1}(만 원)

따라서 24개월 동안 월이율 1 %의 복리로 매월 초에 3만 원씩 적립한 적립금의 원리합계 S는

$$S=\frac{3\times 1.01(1.01^{24}-1)}{1.01-1}=\frac{3\times 1.01(1.27-1)}{0.01}$$

$=3\times 101\times 0.27=81.81$(만 원)

즉 **81만 8100원**이다.

15 Action 두 가지 구입 방법의 12개월 후 원리합계를 각각 구해서 비교한다.

(i) 120만 원짜리 냉장고를 일시불로 구매할 때

일시불 할인 금액을 x(만 원)라고 하면 일시불로 구매할 때 가격은 $120-x$(만 원)이므로 12개월 후 원리합계 S_1은

$S_1=(120-x)\times 1.01^{12}$(만 원)

(ii) 120만 원짜리 냉장고를 12개월 무이자 할부로 구매할 때

한 달 뒤부터 매달 10만 원씩 12번 내므로 12개월 후 원리합계 S_2는

$$S_2=\frac{10\times(1.01^{12}-1)}{1.01-1}=\frac{10\times(1.01^{12}-1)}{0.01}$$

$=1000\times(1.01^{12}-1)$(만 원)

$S_1\leq S_2$이어야 하므로

$(120-x)\times 1.01^{12}<1000\times(1.01^{12}-1)$에서 양변을 1.01^{12}으로 나누면

$120-x<1000\times(1-1.01^{-12})$

$120-x<1000\times(1-0.8875)$

$120-x<1000\times 0.1125$

$120-x<112.5$ $\therefore x>7.5$(만 원)

따라서 일시불 할인 금액이 **7만 5천** 원보다 크면 일시불로 구매하는 것이 더 유리하다.

주의

문제에서 1.01^{12}의 값 대신 1.01^{-12}의 값이 주어졌으므로 $(120-x)\times 1.01^{12}<1000\times(1.01^{12}-1)$에서 양변을 1.01^{12}으로 나눈 다음 주어진 1.01^{-12}의 값을 대입한다.

$1.01^{-12}=0.8875$가 주어졌다고 해서 $1.01^{12}=\frac{1}{0.8875}$로 바꿔서 대입하지 말고 주어진 값을 대입하기 알맞게 식을 변형한 다음 대입하도록 한다.

LECTURE 할부금의 계산

돈의 가치는 시점마다 다르므로 할부 구매와 일시불을 비교할 때 단순히 총액을 비교하는 것은 의미가 없다. 반드시 어느 한 시점(보통 할부금 납부가 완료되는 시점)을 기준으로 각각의 원리합계를 구해서 비교해야 한다.

따라서 보통은 할부금을 정할 때 같은 시점에 두 가지 구매 방법의 원리합계가 같아지도록 할부금을 정한다. 만일 할부로 구매했을 때 원리합계가 더 크다면 일시불로 구매하는 것이 더 유리하고, 할부로 구매했을 때 원리합계가 더 작다면 할부로 구매하는 것이 더 유리하다.

3. 여러 가지 수열

개념 강화 드릴 ① 본문 189쪽

01 (1) $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)=3+5+7+9+11$

(2) $\sum_{k=1}^{5}k(k+1)=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6$
$=2+6+12+20+30$

02 (1) $\sum_{k=5}^{7}(4k+1)=21+25+29=75$

(2) $\sum_{k=3}^{5}\frac{1}{2k-3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{71}{105}$

03 (1) $2+5+8+11+\cdots+29$는 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이다.
이때 일반항이 $3n-1$ ($\rightsquigarrow 2+(n-1)\times3$)이므로 그 합은 $\sum_{k=1}^{10}(3k-1)$

(2) $3+7+11+15+\cdots+35$는 첫째항이 3이고 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제9항까지의 합이다.
이때 일반항이 $4n-1$ ($\rightsquigarrow 3+(n-1)\times4$)이므로 그 합은 $\sum_{k=1}^{9}(4k-1)$

(3) $2+4+8+16+\cdots+1024$는 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이다.
이때 일반항이 2^n ($\rightsquigarrow 2\times2^{n-1}$)이므로 그 합은 $\sum_{k=1}^{10}2^k$

(4) $1+3+9+27+\cdots+729$는 첫째항이 1이고 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이다.
이때 일반항이 3^{n-1} ($\rightsquigarrow 1\times3^{n-1}$)이므로 그 합은 $\sum_{k=1}^{7}3^{k-1}$

04 $\sum_{k=1}^{10}a_k=7$, $\sum_{k=1}^{10}a_k^2=15$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=3$이므로

(1) $\sum_{k=1}^{10}(a_k+4)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4=7+4\times10=47$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+a_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k^2+\sum_{k=1}^{10}a_k=15+7=22$

(3) $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=7-3=4$

(4) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k-1)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}1$
$=2\times7+3-1\times10=7$

05 (1) $(2+1)+(4+2)+(8+3)+\cdots+(1024+10)$
$=(2+4+8+\cdots+1024)+(1+2+3+\cdots+10)$
은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열과 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열의 각 항의 합으로 이루어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로 $\sum_{k=1}^{10}(2^k+k)$

(2) $(3+1)+(9+3)+(27+5)+\cdots+(2187+13)$
$=(3+9+27+\cdots+2187)+(1+3+5+\cdots+13)$
은 첫째항이 3이고 공비가 3인 등비수열과 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열의 각 항의 합으로 이루어진 수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로 $\sum_{k=1}^{7}(3^k+2k-1)$

(3) $(1-2+2)+(3-4+5)+(9-8+8)$
$+\cdots+(729-128+20)$
$=(1+3+9+\cdots+729)+(-2-4-8-\cdots-128)$
$+(2+5+8+\cdots+20)$
은 첫째항이 1이고 공비가 3인 등비수열과 첫째항이 -2이고 공비가 2인 등비수열, 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열의 각 항의 합으로 이루어진 수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로 $\sum_{k=1}^{7}(3^{k-1}-2^k+3k-1)$

06 $\sum_{k=1}^{10}(3k+2^k)$
$=(3\times1+2^1)+(3\times2+2^2)+\cdots+(3\times10+2^{10})$
$=(3+6+\cdots+30)+(2^1+2^2+\cdots+2^{10})$
$=\frac{10(3+30)}{2}+\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}$
$=165+2046=2211$

07 (1) $\sum_{k=1}^{15}k=\frac{15\times16}{2}=120$

(2) $\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$

(3) $\sum_{k=1}^{7}k^3=\left(\frac{7\times8}{2}\right)^2=784$

(4) $\sum_{k=1}^{12}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{12}k$
$=\frac{12\times13\times25}{6}-\frac{12\times13}{2}$
$=650-78=572$

(5) $\sum_{k=1}^{8}k(k+1)=\sum_{k=1}^{8}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{8}k^2+\sum_{k=1}^{8}k$
$=\frac{8\times9\times17}{6}+\frac{8\times9}{2}$
$=204+36=240$

(6) $\sum_{k=1}^{6}k(k+1)(k+2)$
$=\sum_{k=1}^{6}(k^3+3k^2+2k)=\sum_{k=1}^{6}k^3+3\sum_{k=1}^{6}k^2+2\sum_{k=1}^{6}k$
$=\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2+3\times\frac{6\times7\times13}{6}+2\times\frac{6\times7}{2}$
$=441+273+42=756$

다른 풀이

연속된 자연수의 곱의 합 공식을 이용하면 (5), (6)번은 다음과 같이 풀 수 있다.

(5) $\sum_{k=1}^{8} k(k+1)=\frac{1}{3}\times 8\times 9\times 10=240$

(6) $\sum_{k=1}^{6} k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}\times 6\times 7\times 8\times 9=756$

확인 문제 본문 190~193쪽

1-1 Action 등차수열과 등비수열의 합 공식을 이용한다.

(1) $\sum_{k=1}^{15}(5k-2)$는 첫째항이 3이고 공차가 5인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합을 나타낸다.

$\therefore \sum_{k=1}^{15}(5k-2)=\frac{15\{2\times 3+(15-1)\times 5\}}{2}$

$=\frac{15(6+70)}{2}=570$

(2) $\sum_{k=1}^{6} 3^{k-1}$은 첫째항이 1이고 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제6항까지의 합을 나타낸다.

$\therefore \sum_{k=1}^{6} 3^{k-1}=\frac{1\cdot(3^6-1)}{3-1}=\frac{729-1}{2}=364$

(3) $\sum_{k=1}^{100}(-1)^k$은 첫째항이 -1이고 공비가 -1인 등비수열의 첫째항부터 제100항까지의 합을 나타낸다.

$\therefore \sum_{k=1}^{100}(-1)^k=\frac{(-1)\{1-(-1)^{100}\}}{1-(-1)}$

$=-\frac{1-1}{2}=0$

1-2 Action 첫째항의 k값에 주의한다.

(1) $\sum_{k=0}^{15}(2k+3)=3+5+7+\cdots+33$이므로 주어진 식은 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제16항까지의 합을 나타낸다.

$\therefore \sum_{k=0}^{15}(2k+3)=\frac{16\{2\times 3+(16-1)\times 2\}}{2}$

$=\frac{16(6+30)}{2}=288$

(2) $\sum_{k=2}^{10} 2^k=4+8+16+\cdots+1024$이므로 주어진 식은 첫째항이 4이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제9항까지의 합을 나타낸다.

$\therefore \sum_{k=2}^{10} 2^k=\frac{4(2^9-1)}{2-1}=2^{11}-4$

$=2048-4=2044$

(3) $\sum_{k=0}^{n} 6^k=1+6+6^2+\cdots+6^n$이므로 주어진 식은 첫째항이 1이고 공비가 6인 등비수열의 첫째항부터 제$n+1$항까지의 합을 나타낸다.

$\therefore \sum_{k=0}^{n} 6^k=\frac{1\cdot(6^{n+1}-1)}{6-1}=\frac{1}{5}(6^{n+1}-1)$

2-1 Action $\sum$ 기호 안을 전개하여 주어진 조건을 이용한다.

$\sum_{k=1}^{10} a_k=5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2=15$이므로

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-3)^2=\sum_{k=1}^{10}(4a_k^2-12a_k+9)$

$=4\sum_{k=1}^{10} a_k^2-12\sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} 9$

$=4\times 15-12\times 5+9\times 10$

$=90$

2-2 Action $\sum$ 기호 없이 각 항의 합으로 나타낸다.

$\sum_{k=1}^{9} f(k+1)=f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)$,

$\sum_{k=2}^{10} f(k-1)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$이므로

$\sum_{k=1}^{9} f(k+1)-\sum_{k=2}^{10} f(k-1)=f(10)-f(1)$

$=60-15=45$

3-1 Action 일반항을 구해서 $\sum$ 기호를 이용하여 나타낸다.

(1) $1\times 3+2\times 5+3\times 7+\cdots+20\times 41$은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열과 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열의 각 항의 곱으로 이루어진 수열의 첫째항부터 제20항까지의 합이다.

따라서 일반항이 $n(2n+1)$, 즉 $2n^2+n$이므로

$\sum_{k=1}^{20}(2k^2+k)=2\times\frac{20\times 21\times 41}{6}+\frac{20\times 21}{2}$

$=5740+210=5950$

(2) $1\times 10+2\times 9+3\times 8+\cdots+10\times 1$은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열과 첫째항이 10이고 공차가 -1인 등차수열의 각 항의 곱으로 이루어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이다.

따라서 일반항이 $n(11-n)$, 즉 $-n^2+11n$이므로

$\sum_{k=1}^{10}(-k^2+11k)=-\frac{10\times 11\times 21}{6}+11\times\frac{10\times 11}{2}$

$=-385+605=220$

LECTURE $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$을 구하는 공식의 유도 과정

(1) $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$에서

$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ ……㉠

㉠에 k 대신 1, 2, 3, …, n을 차례로 대입하면

$$2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1$$
$$3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1$$
$$4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1$$
$$\cdots\cdots$$
$$(n+1)^3-n^3=3\times n^2+3\times n+1$$

위의 각 식을 변끼리 더하면

$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$

$=3\sum_{k=1}^{n} k^2+3\sum_{k=1}^{n} k+n$

이때 $(n+1)^3-1=n^3+3n^2+3n$이고,

$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$n^3+3n^2+3n=3\sum_{k=1}^{n} k^2+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n$에서

$3\sum_{k=1}^{n} k^2=n^3+3n^2+3n-3\times\frac{n(n+1)}{2}-n$

$=\frac{2n^3+6n^2+6n-3n^2-3n-2n}{2}$

$=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

$(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1$에서

$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ ……㉡

㉡에 k 대신 1, 2, 3, …, n을 차례로 대입하면

$$2^4-1^4=4\times1^3+6\times1^2+4\times1+1$$
$$3^4-2^4=4\times2^3+6\times2^2+4\times2+1$$
$$4^4-3^4=4\times3^3+6\times3^2+4\times3+1$$
$$\cdots\cdots$$
$$(n+1)^4-n^4=4\times n^3+6\times n^2+4\times n+1$$

위의 각 식을 변끼리 더하면

$(n+1)^4-1^4=4(1^3+2^3+\cdots+n^3)+6(1^2+2^2+\cdots+n^2)$
$+4(1+2+\cdots+n)+n$

$=4\sum_{k=1}^{n} k^3+6\sum_{k=1}^{n} k^2+4\sum_{k=1}^{n} k+n$

이때 $(n+1)^4-1^4=n^4+4n^3+6n^2+4n$이고,

$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$n^4+4n^3+6n^2+4n$

$=4\sum_{k=1}^{n} k^3+6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\times\frac{n(n+1)}{2}+n$

에서

$4\sum_{k=1}^{n} k^3=n^4+4n^3+6n^2+4n$
$-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n$
$=n^4+4n^3+6n^2+4n$
$-(2n^3+3n^2+n)-(2n^2+2n)-n$
$=n^4+2n^3+n^2$
$=n^2(n+1)^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

3-2 Action 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-kx+1=0$의 두 근이 α_k, β_k이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha_k+\beta_k=k$, $\alpha_k\beta_k=1$

$\therefore \sum_{k=2}^{6}(\alpha_k^2+\beta_k^2)=\sum_{k=2}^{6}\{(\alpha_k+\beta_k)^2-2\alpha_k\beta_k\}$

$=\sum_{k=2}^{6}(k^2-2)$

$=\sum_{k=1}^{6}(k^2-2)-(1^2-2)$

$=\frac{6\times7\times13}{6}-2\times6-(-1)$

$=91-12+1=\mathbf{80}$

4-1 Action $a_n=S_n-S_{n-1}$을 이용한다.

$\sum_{k=1}^{n} a_k=3^n-1$에서

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)$

$=3^n-3^{n-1}=2\times3^{n-1}$

(ii) $n=1$일 때

$a_1=\sum_{k=1}^{1} a_k=3^1-1=2$

이때 $a_1=\sum_{k=1}^{1} a_k=2$는 (i)의 $a_n=2\times3^{n-1}$에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 $\boldsymbol{a_n=2\times3^{n-1}}$

04-2 Action $\sum_{k=1}^{n} a_k$에서 a_n을 구한다.

(1) $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - 2n$에서

(i) $n \geq 2$일 때

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= (n^2-2n) - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ &= (n^2-2n) - (n^2-2n+1-2n+2) \\ &= 2n-3 \end{aligned}$$

(ii) $n=1$일 때, $a_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = 1-2 = -1$

이때 $a_1 = -1$은 (i)의 $a_n = 2n-3$에 $n=1$을 대입한 결과와 같으므로 $a_n = 2n-3$

따라서 $a_{2k} = 2 \times 2k - 3 = 4k-3$이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} (4k-3) = 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 3 \times 10 = \mathbf{190}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - 3n$에서

(i) $n \geq 2$일 때

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= (2n^2-3n) - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= (2n^2-3n) - (2n^2-4n+2-3n+3) \\ &= 4n-5 \end{aligned}$$

(ii) $n=1$일 때, $a_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = 2-3 = -1$

이때 $a_1 = -1$은 (i)의 $a_n = 4n-5$에 $n=1$을 대입한 결과와 같으므로 $a_n = 4n-5$

따라서 $a_{2k} = 4 \times 2k - 5 = 8k-5$이므로

$ka_{2k} = k(8k-5) = 8k^2 - 5k$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} ka_{2k} = \sum_{k=1}^{10} (8k^2-5k)$$

$$= 8 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 5 \times \frac{10 \times 11}{2}$$

$$= 3080 - 275 = \mathbf{2805}$$

LECTURE $\sum_{k=1}^{n} a_k$로 a_n 구하기

일반적으로 $\sum_{k=1}^{n} a_k$, 즉 S_n이 주어지면

(i) $n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$

(ii) $n=1$일 때, $a_1 = S_1$

으로 경우를 나누어 구한 후 (ii)에서 구한 a_1과 (i)에서 구한 a_n에 $n=1$을 대입한 값이 같은 지를 비교하여 일반항을 구해야 한다. 그러나 주어진 S_n이 상수항이 없는 n에 대한 이차식이면 a_n은 첫째항부터 등차수열을 이루고, S_n이 $Ar^n - A$와 같은 지수꼴이면 a_n은 첫째항부터 등비수열을 이루므로 두 가지 경우에는 굳이 $n \geq 2$일 때와 $n=1$일 때로 경우를 나누어 a_n을 구할 필요가 없다.

실력 특강 확인 01 본문 195 쪽

1. (1) 제 n 항이

$1+3+9+\cdots+3^{n-1} = \frac{3^n-1}{3-1} = \frac{1}{2}(3^n-1)$이므로

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2}(3^k-1) = \frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^{10}-1)}{3-1} - 10\right\}$$

$$= \frac{3}{4}(3^{10}-1) - 5 = \frac{1}{4}(\mathbf{3^{11}-23})$$

(2) 제 n 항이

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - n$$

$$= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$이므로

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = \mathbf{385}$$

(3) 제 n 항 $\overbrace{777\cdots7}^{n\text{개}}$은 첫째항이 7이고 공비가 10인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$\frac{7(10^n-1)}{10-1} = \frac{7}{9}(10^n-1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{7}{9}(10^k-1) = \frac{7}{9}\left\{\frac{10(10^{10}-1)}{10-1} - 10\right\}$$

$$= \frac{7}{9} \times \frac{10^{11}-10-90}{9}$$

$$= \frac{\mathbf{7 \times 10^{11} - 700}}{\mathbf{81}}$$

(4) 제 n 항이

$\overbrace{0.999\cdots9}^{n\text{개}} = 0.9+0.09+0.009+\cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots$

이므로 첫째항이 $\frac{9}{10}$이고 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 같다. 즉

$$\frac{\frac{9}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\left(1-\frac{1}{10^k}\right) = 10 - \frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^{10}}\right)}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= 10 - \frac{10^{10}-1}{10^{11}-10^{10}} = \frac{9 \times 10^{11} - 10^{10} + 1}{9 \times 10^{10}}$$

$$= \frac{\mathbf{89 \times 10^{10} + 1}}{\mathbf{9 \times 10^{10}}}$$

참고

각 문제를 $\sum$ 기호를 두 번 사용하여 나타내면 다음과 같다.

(1) $\sum_{n=1}^{10}\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}$ (2) $\sum_{n=1}^{10}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

(3) $\sum_{n=1}^{10}\sum_{k=1}^{n}7\cdot10^{k-1}$ (4) $\sum_{n=1}^{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}$

2 (1) $\sum_{i=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{6}(2i+3k)\right\}$

$=\sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{k=1}^{6}2i+3\sum_{k=1}^{6}k\right)=\sum_{i=1}^{10}\left(2i\times6+3\times\frac{6\times7}{2}\right)$

$=\sum_{i=1}^{10}(12i+63)=12\times\frac{10\times11}{2}+63\times10$

$=660+630=\mathbf{1290}$

(2) $\sum_{i=1}^{11}\left(\frac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i}k\right)$

$=\sum_{i=1}^{11}\left\{\frac{1}{i+1}\times\frac{i(i+1)}{2}\right\}=\sum_{i=1}^{11}\frac{i}{2}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{11\times12}{2}=\mathbf{33}$

(3) $\sum_{i=1}^{8}\left(\sum_{k=1}^{i}ik\right)$

$=\sum_{i=1}^{8}\left(i\sum_{k=1}^{i}k\right)=\sum_{i=1}^{8}\left\{i\times\frac{i(i+1)}{2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(i^3+i^2)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2+\frac{8\times9\times17}{6}\right\}$

$=\frac{1}{2}(1296+204)=\mathbf{750}$

(4) $\sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{k=1}^{10}2^k\cdot i\right)$

$=\sum_{i=1}^{10}\left(i\sum_{k=1}^{10}2^k\right)=\sum_{i=1}^{10}\left\{i\times\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}\right\}$

$=\sum_{i=1}^{10}2046i=2046\times\frac{10\times11}{2}=\mathbf{112530}$

개념 강화 드릴 ② 본문 197쪽

01 $\{a_n\}:\frac{1}{1\times2},\frac{1}{2\times3},\frac{1}{3\times4},\frac{1}{4\times5},\cdots$에서

(1) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

(2) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

(3) $\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$

$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

02 $\{a_n\}:\frac{1}{1+\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}},\cdots$에서

(1) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}$

$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}=-(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$

$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(3) $\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{6}-\sqrt{5})$

$=\mathbf{-1+\sqrt{6}}$

03 $\log_2\frac{k+1}{k}=\log_2(k+1)-\log_2k$이므로

$\sum_{k=1}^{7}\log_2\frac{k+1}{k}$

$=\sum_{k=1}^{7}\{\log_2(k+1)-\log_2k\}$

$=(\log_22-\log_21)+(\log_23-\log_22)+\cdots+(\log_28-\log_27)$

$=\log_28-\log_21$

$=3$ ($\log_28=\log_22^3=3\log_22=3$)

04 (1) 수열 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, …의 계차수열은

2, 3, 4, 5, 6, 7, …

(2) 수열 2, 3, 6, 11, 18, 27, 38, …의 계차수열은

1, 3, 5, 7, 9, 11, …

(3) 수열 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, …의 계차수열은

2, 4, 8, 16, 32, 64, …

(4) 수열 3, 4, 2, 6, −2, 14, −18, …의 계차수열은

1, −2, 4, −8, 16, −32, …

05 3, 5, 9, 15, 23, **33**, …

2 4 6 8 10 …

수열 $\{a_n\}$의 계차는 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열을 이루므로 일반항은 $2n$이다. 이때 $a_1=3$이므로

$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}2k$

$=3+2\times\frac{(n-1)n}{2}=n^2-n+3$

06 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이 $\{b_n\}$이므로 $a_{12}=a_1+\sum_{k=1}^{11}b_k$에서

$\sum_{k=1}^{11}b_k=a_{12}-a_1=22-12=\mathbf{10}$

07 오른쪽 그림에서 각 행을 군으로 하는 군수열을 만들면

1					
2	3				
4	5	6			
7	8	9	10		
11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21
		·····			

(1) 제4군은 **7, 8, 9, 10**

(2) 제5군4항의 수는 **14**

(3) 각 군의 첫째항으로 이루어진 수열은 **1, 2, 4, 7, 11, 16, ···**

(4) 수열 1, 2, 4, 7, 11, 16의 계차수열은 1, 2, 3, 4, 5, ···이므로 각 군의 첫째항으로 이루어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k=1+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}$$

08 수열 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \cdots$에서

(1) 분모가 같은 항끼리 묶어 군수열로 나타내면

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right), \cdots$$

(2) 위의 군수열에서 제3군은 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}$

(3) 위의 군수열에서 $\frac{2}{4}$는 제**4**군**2**항이다.

확인 문제 본문 198~206쪽

05-1 Action 부분분수로의 변형을 이용하여 각 항을 분리한다.

(1) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{28}-\frac{1}{31}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{30}{31}=\frac{10}{31}$

(2) 수열 $\frac{1}{3^2-1}, \frac{1}{5^2-1}, \frac{1}{7^2-1}, \cdots$의 일반항은

$$\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{(2n+1+1)(2n+1-1)}$$

$$=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$\therefore \frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots+\frac{1}{17^2-1}$

$=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{(2k+1)^2-1}=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{9}$

05-2 Action 제n항을 간단히 정리하고 부분분수로의 변형을 이용한다.

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{2}{k(k+1)}$$

$$=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

이므로

$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

$=\sum_{k=2}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{2(n-1)}{2(n+1)}=\frac{n-1}{n+1}$

이때 이 합이 $\frac{9}{11}$이므로 $\frac{n-1}{n+1}=\frac{9}{11}$에서 $n=10$

주의

일반항이 $\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}$인데 첫째항은 $\frac{1}{1+2}$이다.

따라서 k는 2부터 n까지이다.

06-1 Action 일반항의 분모를 유리화하거나 이중근호를 풀어 이웃한 항끼리 소거되는 꼴로 변형한다.

(1) $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$

$=-(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$

$\therefore \sum_{k=3}^{47}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$=\sum_{k=3}^{47}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$

$=-\sqrt{4}+\sqrt{49}=-2+7=5$

(2) $\sqrt{4k-2\sqrt{4k^2-1}}$

$=\sqrt{(2k+1)+(2k-1)-2\sqrt{(2k+1)(2k-1)}}$

$=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{24}\sqrt{4k-2\sqrt{4k^2-1}}$

$=\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{47})$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{49}=-1+7=6$

6-2 Action 이중근호를 풀어서 대입한다.

$\sqrt{2n+1+2\sqrt{n^2+n}}=\sqrt{(n+1)+n+2\sqrt{(n+1)n}}$

$=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

따라서 $f(n)=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$이므로

$\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{f(k)}=\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$=\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{25}=5-1=\mathbf{4}$

7-1 Action 로그의 성질을 이용하여 각 항을 분리한다.

(1) $\log_3\left(1-\frac{2}{2k+1}\right)=\log_3\frac{2k-1}{2k+1}$

$=\log_3(2k-1)-\log_3(2k+1)$에서

$\sum_{k=1}^{40}\log_3\left(1-\frac{2}{2k+1}\right)$

$=\sum_{k=1}^{40}\{\log_3(2k-1)-\log_3(2k+1)\}$

$=(\log_3 1-\log_3 3)+(\log_3 3-\log_3 5)$

$+\cdots+(\log_3 79-\log_3 81)$

$=\log_3 1-\log_3 81=\mathbf{-4}$

(2) $\log\left(1-\frac{2}{k+2}\right)=\log\frac{k}{k+2}=\log k-\log(k+2)$에서

$\sum_{k=1}^{9}\log\left(1-\frac{2}{k+2}\right)$

$=\sum_{k=1}^{9}\{\log k-\log(k+2)\}$

$=(\log 1-\log 3)+(\log 2-\log 4)+(\log 3-\log 5)$

$+\cdots+(\log 8-\log 10)+(\log 9-\log 11)$

$=\log 1+\log 2-\log 10-\log 11$

$=\log\frac{2}{10\times 11}=\log\frac{1}{55}=\mathbf{-\log 55}$

다른 풀이

(1) $\sum_{k=1}^{40}\log_3\frac{2k-1}{2k+1}=\log_3\frac{1}{3}+\log_3\frac{3}{5}+\cdots+\log_3\frac{79}{81}$

$=\log_3\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{79}{81}\right)$

$=\log_3\frac{1}{81}=-4$

(2) $\sum_{k=1}^{9}\log\frac{k}{k+2}$

$=\log\frac{1}{3}+\log\frac{2}{4}+\log\frac{3}{5}+\cdots+\log\frac{8}{10}+\log\frac{9}{11}$

$=\log\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{8}{10}\times\frac{9}{11}\right)$

$=\log\frac{2}{10\times 11}=\log\frac{1}{55}=-\log 55$

7-2 Action 로그의 밑과 진수 모두에 역수를 취한다.

$a_n=\log_{\frac{1}{2}}\frac{n}{n+1}=\log_2\frac{n+1}{n}=\log_2(n+1)-\log_2 n$이므로

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{\log_2(k+1)-\log_2 k\}$

$=(\log_2 2-\log_2 1)+(\log_2 3-\log_2 2)$

$+\cdots+\{\log_2(n+1)-\log_2 n\}$

$=-\log_2 1+\log_2(n+1)$

$=\log_2(n+1)$

즉 $\log_2(n+1)=10$이므로 $n+1=2^{10}$

$\therefore n=2^{10}-1=\mathbf{1023}$

참고

$\log_a\frac{1}{b}=\log_a b^{-1}=-\log_a b$이고,

$\log_{\frac{1}{a}}b=\frac{\log b}{\log\frac{1}{a}}=\frac{\log b}{-\log a}=-\log_a b$이므로

$\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}=-\log_a\frac{1}{b}=-(-\log_a b)=\log_a b$

셀파 특강 **확인 02** 본문 201 쪽

$\sum_{k=1}^{10}(k\times 3^k)=S$라 하면

$S=1\times 3+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+10\times 3^{10}$

$-)\ 3S=\quad 1\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+9\times 3^{10}+10\times 3^{11}$

$-2S=1\times 3+1\times 3^2+1\times 3^3+\cdots+1\times 3^{10}-10\times 3^{11}$

$=(3+3^2+3^3+\cdots+3^{10})-10\times 3^{11}$

$=\frac{3(3^{10}-1)}{3-1}-10\times 3^{11}$

$=-\frac{19}{2}\times 3^{11}-\frac{3}{2}$

$\therefore S=\mathbf{\frac{19}{4}\times 3^{11}+\frac{3}{4}}$

오답 피하기

$\sum_{k=1}^{10}(k\times 3^k)=\sum_{k=1}^{10}k\times\sum_{k=1}^{10}3^k$

$=\frac{10\times 11}{2}\times\frac{3(3^{10}-1)}{3-1}$

$=\frac{55}{2}\times 3^{11}-\frac{165}{2}$

와 같이 계산하면 안 된다.

$\sum$ 기호를 나누어서 계산하는 것은 이 문제와 같이 두 수열의 곱으로 되어 있는 경우에는 안 되고, 두 수열의 합 또는 차로 이루어져 있는 경우만 가능하다.

8-1 Action $k=1, 2, 3, \cdots$을 대입해서 규칙을 찾는다.

$(-1)^{k+1}\tan\frac{k\pi}{3}$에 $k=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 차례로 나열하면

$(-1)^{1+1}\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $(-1)^{2+1}\tan\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3}$,

$(-1)^{3+1}\tan\frac{3}{3}\pi=0$, $(-1)^{4+1}\tan\frac{4}{3}\pi=-\sqrt{3}$,

$(-1)^{5+1}\tan\frac{5}{3}\pi=-\sqrt{3}$, $(-1)^{6+1}\tan\frac{6}{3}\pi=0$,

$(-1)^{7+1}\tan\frac{7}{3}\pi=\sqrt{3}$, $(-1)^{8+1}\tan\frac{8}{3}\pi=\sqrt{3}$, $\cdots$

즉 $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 0, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\cdots$이므로 $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 0, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 0이 반복된다. 이때 40을 6으로 나누면 몫이 6이고 나머지가 4이므로

$\sum_{k=1}^{40}(-1)^{k+1}\tan\frac{k\pi}{3}$

$=(\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3})\times6+\sqrt{3}+\sqrt{3}+0-\sqrt{3}=\sqrt{3}$

8-2 Action ω의 성질을 이용한다.

방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$\omega^2+1=\omega$, $\omega^2=\omega-1$

일반항 $\frac{\omega^k}{\omega^{2k}+1}$에 $k=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 차례로 나열하면

$\frac{\omega}{\omega^2+1}=\frac{\omega}{\omega}=1$, $\frac{\omega^2}{\omega^4+1}=\frac{\omega-1}{-\omega+1}=-1$,

$\frac{\omega^3}{\omega^6+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$, $\frac{\omega^4}{\omega^8+1}=\frac{-\omega}{\omega^2+1}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$,

$\frac{\omega^5}{\omega^{10}+1}=\frac{-\omega^2}{-\omega+1}=\frac{-\omega+1}{-\omega+1}=1$, $\frac{\omega^6}{\omega^{12}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$,

$\frac{\omega^7}{\omega^{14}+1}=\frac{\omega}{\omega^2+1}=\frac{\omega}{\omega}=1$, $\cdots$

즉 $1, -1, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}, 1, \cdots$이므로 $1, -1, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}$이 반복된다. 이때 50을 6으로 나누면 몫이 8이고 나머지가 2이므로

$\sum_{k=1}^{50}\frac{\omega^k}{\omega^{2k}+1}=\left(1-1-\frac{1}{2}-1+1+\frac{1}{2}\right)\times8+1-1=0$

셀파 특강 **확인 03** 본문 203 쪽

1. (1) $[\sqrt{2n}]$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하면

$[\sqrt{2}]=1$, $[\sqrt{4}]=2$, $[\sqrt{6}]=2$, $[\sqrt{8}]=2$, $[\sqrt{10}]=3$, $[\sqrt{12}]=3$, $[\sqrt{14}]=3$, $[\sqrt{16}]=4$, $[\sqrt{18}]=4$, $[\sqrt{20}]=4$이므로

$\sum_{n=1}^{10}[\sqrt{2n}]=1+2+2+2+3+3+3+4+4+4$

$=28$

다른 풀이

(i) $[\sqrt{2n}]=1$일 때, $1\le\sqrt{2n}<2$, $1\le2n<4$

$\frac{1}{2}\le n<2$ $\therefore n=1$

(ii) $[\sqrt{2n}]=2$일 때, $2\le\sqrt{2n}<3$, $4\le2n<9$

$2\le n<\frac{9}{2}$ $\therefore n=2, 3, 4$

(iii) $[\sqrt{2n}]=3$일 때, $3\le\sqrt{2n}<4$, $9\le2n<16$

$\frac{9}{2}\le n<8$ $\therefore n=5, 6, 7$

(iv) $[\sqrt{2n}]=4$일 때, $4\le\sqrt{2n}<5$, $16\le2n<25$

$8\le n<\frac{25}{2}$ $\therefore n=8, 9, 10, 11, 12$

따라서 $k=1, 2, 3, \cdots, 10$일 때 (i)~(iv)로부터 1이 1개, 2가 3개, 3이 3개, 4가 3개이므로

$1+2\times3+3\times3+4\times3=28$

(2) $[\log_2 n]$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하면

$[\log_2 1]=0$, $[\log_2 2]=1$, $[\log_2 3]=1$,

$[\log_2 4]=2$, $[\log_2 5]=2$, $\cdots$, $[\log_2 8]=3$, $\cdots$이므로

$\sum_{n=1}^{10}[\log_2 n]=0+\underbrace{1+1}_{\text{제 2 항부터 제 3 항까지}}+\underbrace{2+2+2+2}_{\text{제 4 항부터 제 7 항까지}}+\underbrace{3+3+3}_{\text{제 8 항부터 제 10 항까지}}=19$

(제 1 항)

교육청 기출

2. $a_n=\left[\frac{n}{m}\right]$에서

ㄱ. $m=2$일 때, $a_5=\left[\frac{5}{2}\right]=2$ (참)

ㄴ. $m=3$일 때

$\sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{k}{3}\right]$

$=0+0+\underbrace{1+1+1}_{\text{제 3 항부터 제 5 항까지}}+\cdots+\underbrace{32+32+32}_{\text{제 96 항부터 제 98 항까지}}+\underbrace{33+33}_{\text{제 99 항부터 제 100 항까지}}$

$=(1+2+\cdots+32)\times3+33\times2$

$=\frac{32\times33}{2}\times3+33\times2=1584+66=1650$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{mn}a_k=\sum_{k=1}^{mn}\left[\frac{k}{m}\right]$

$=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{\text{제 1 항부터 제 } m-1 \text{ 항까지}}+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{제 } m \text{ 항부터 제 } 2m-1 \text{ 항까지}}+\cdots+n$ (제 mn 항)

$=\{1+2+\cdots+(n-1)\}\times m+n$

$=\frac{n(n-1)}{2}\times m+n$

$=\frac{n(mn-m+2)}{2}$ (참)

따라서 주어진 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

09-1 Action 계차에서 규칙을 찾는다.

(1) 수열 2, 1, 1, 2, 4, 7, 11, …의 이웃한 항의 차는
$-1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$
즉 첫째항이 -1이고 공차가 1인 등차수열을 이룬다.

$$\therefore a_{10}=2+\sum_{k=1}^{9}\{-1+(k-1)\}$$
$$=2+\sum_{k=1}^{9}(k-2)$$
$$=2+\frac{9\times10}{2}-2\times9$$
$$=2+45-18=\mathbf{29}$$

참고

주어진 수열의 일반항 a_n은
$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k-2)$$
$$=2+\frac{n(n-1)}{2}-2(n-1)=\frac{n^2-5n+8}{2}$$

(2) 수열 20, 24, 25, 23, 18, 10, -1, …의 이웃한 항의 차는
$4, 1, -2, -5, -8, -11, \cdots$
즉 첫째항이 4이고 공차가 -3인 등차수열을 이룬다.

$$\therefore b_{10}=20+\sum_{k=1}^{9}\{4+(k-1)\times(-3)\}$$
$$=20+\sum_{k=1}^{9}(-3k+7)$$
$$=20-3\times\frac{9\times10}{2}+7\times9$$
$$=20-135+63=\mathbf{-52}$$

참고

주어진 수열의 일반항 b_n은
$$b_n=20+\sum_{k=1}^{n-1}(-3k+7)$$
$$=20-3\times\frac{n(n-1)}{2}+7(n-1)=\frac{-3n^2+17n+26}{2}$$

09-2 Action 계차수열과 일반항 사이의 관계를 이용한다.

수열 $\{a_n\}$의 계차수열이 $\{b_n\}$이므로
$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
이때 $\sum_{k=1}^{n}b_k=n(n-1)$에서
$$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=(n-1)\{(n-1)-1\}=(n-1)(n-2)=n^2-3n+2$$
따라서 $a_n=2+n^2-3n+2=n^2-3n+4$이므로
$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(k^2-3k+4)=\sum_{k=1}^{10}k^2-3\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}4$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}-3\times\frac{10\times11}{2}+4\times10$$
$$=385-165+40=\mathbf{260}$$

10-1 Action 각 행을 군으로 하는 군수열을 만든다.

각 행을 각각 1군, 2군, 3군, …, n군이라 하면 n군의 항의 개수는 n이므로 1군부터 n군까지의 항의 개수는
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
만약 77이 n군에 속한다고 하면 n은 $\frac{n(n+1)}{2}\geq77$ ……㉠을 만족시키는 최소의 자연수인데, $\frac{12\times13}{2}=78$에서 ㉠을 만족시키는 최소의 자연수는 12이므로 $n=12$, 즉 77은 12군에 속한다.

이때 11군까지의 항의 개수는 $\frac{11\times12}{2}=66$이므로 12군의 첫째항은 67이고, 12군은 1씩 증가하는 수들로 이루어져 있으므로 77은 12군의 제 11 항이다.
따라서 77은 **12번째 줄의 11번째** 수이다.

10-2 Action 모든 군의 첫째항이 1이 되도록 군수열을 만든다.

주어진 수열에서 모든 군의 첫째항이 1이 되도록 묶어서 군수열을 만들면
$(1), (1, 3), (1, 3, 5), \cdots, (1, 3, \cdots, 31, 33), (1)$
이때, 마지막 군 (1)을 제외한 나머지 군의 끝항으로 이루어진 수열을 만들면 1, 3, 5, 7, …, 33이므로 제 n군의 끝항의 수는 $2n-1$이다.
또한 제 n군은 첫째항이 1, 끝항이 $2n-1$이고 항이 n개인 등차수열이므로 제 n군의 모든 항의 합은
$$\frac{n\{1+(2n-1)\}}{2}=n^2$$
이때 주어진 수열로 만든 군수열에서 33은 제 17 군의 끝항이므로 구하는 모든 항의 합은
$$\sum_{k=1}^{17}k^2+1=\frac{17\times18\times35}{6}+1=\mathbf{1786}$$

참고

주어진 수열은 끝항이 1이고 끝에서 두 번째 항은 33이다.
따라서 끝에서 두 번째 항 33은 제17군의 끝항임을 알 수 있다. 그러므로 구하는 모든 항의 합은 제1군부터 제17군까지 모든 항의 합을 더한 다음 주어진 수열의 끝항 1을 더하면 된다.

11-1 Action 제 n 행 1 열의 수와 제 1 행 m 열의 수를 구한다.

(1) 1열의 수로 이루어진 수열은 1, 2, 5, 10, …이고, 이 수열의 계차수열은 1, 3, 5, …이다. 따라서 n행 1열의 수는
$$1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=1+2\times\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$$
$$=n^2-2n+2$$
이때 9행 1열의 수는 $9^2-2\times9+2=65$이고 9행 6열의 수는 9행 1열의 수보다 5만큼 큰 수이므로 9행 6열의 수는 $65+5=\mathbf{70}$

(2) 1행의 수로 이루어진 수열은 1, 4, 9, 16, …이고, 이 수열의 계차수열은 3, 5, 7, …이다. 따라서 1행 m열의 수는

$1+\sum_{k=1}^{m-1}(2k+1)=1+2\times\frac{(m-1)m}{2}+m-1=m^2$

이때 1행 8열의 수는 $8^2=64$이고, 5행 8열의 수는 1행 8열의 수보다 4만큼 작은 수이므로 5행 8열의 수는

$64-4=\mathbf{60}$

참고

수열 1, 4, 9, 16, …의 일반항은 계차수열을 이용하지 않고도 n^2임을 알 수 있다.

LECTURE **군수열의 항 구하기**

첫째항이 a_1이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$을 오른쪽 표와 같이 나열할 때, n행 m열의 수는 다음과 같이 구한다.

a_1	a_4	a_9	a_{16}	…
a_2	a_3	a_8	a_{15}	
a_5	a_6	a_7	a_{14}	
a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	
⋮				⋱

❶ n행 1열의 수와 1행 m열의 수를 구한다.

❷ (i) $n\geq m$일 때, n행 1열의 수에 $(m-1)d$를 더한다.
(ii) $n\leq m$일 때, 1행 m열의 수에서 $(n-1)d$를 뺀다.

빈출 특강 **확인 04** 본문 207 쪽

수열 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \cdots$에서

(1) 제 n군은 분자와 분모의 합이 $n+1$인 분수를 분자가 작은 수부터 차례로 나열한 것이므로 제4군의 항을 모두 나열하면

$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$

(2) 제 n군은 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-2}, \cdots, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}$이므로

제 n군 m항의 수는 $\frac{m}{n-m+1}$

(3) (2)에서 제 n군 m항의 수는 $\frac{m}{n-m+1}$이므로

$m=5$, $n-m+1=7$에서 $n=11$

따라서 $\frac{5}{7}$는 제11군 5항의 수이다.

다른 풀이

$7+5=12$이므로 $\frac{5}{7}$는 제11군에 속하고, 분자가 5이므로 $\frac{5}{7}$는 제11군 5항의 수이다.

(4) 제 n군에는 n개의 항이 있으므로 제10군까지의 항의 개수는

$\frac{10\times11}{2}=55$

또한 $\frac{5}{7}$는 제11군 5항의 수이므로 수열 $\{a_n\}$에서 $\frac{5}{7}$는 $55+5=60$번째 항이다.

따라서 $a_k=\frac{5}{7}$를 만족시키는 k의 값은 **60**

기본강화 본문 208~209 쪽

01 Action $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{2n}a_k$를 이용한다.

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=3n^2$에서

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

이므로 $\sum_{k=1}^{2n}a_k=3n^2$이다.

이 식에 $n=5$를 대입하면 $\sum_{k=1}^{10}a_k=3\times5^2=\mathbf{75}$

참고

$\sum_{k=1}^{2n}a_k=3n^2$에서 $\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{4}n^2$이다.

02 Action Σ 기호를 각 항의 합의 꼴로 나타낸다.

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=20$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=20$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=10$에서

$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+9a_{10}=10$ ……㉡

㉠−㉡에서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=10$이고,

이때 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\mathbf{10}$

03 Action 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2+kx-k=0$의 두 근이 α_k, β_k이므로

$\alpha_k+\beta_k=-k$, $\alpha_k\beta_k=-k$

이때 $\alpha_k^3+\beta_k^3=(\alpha_k+\beta_k)^3-3\alpha_k\beta_k(\alpha_k+\beta_k)=-k^3-3k^2$

이므로

$\sum_{k=1}^{4}(\alpha_k^3+\beta_k^3)=\sum_{k=1}^{4}(-k^3-3k^2)$

$=-\left(\frac{4\times5}{2}\right)^2-3\times\frac{4\times5\times9}{6}$

$=-100-90=\mathbf{-190}$

04 Action 일반항 a_n을 구한다.

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$에서

(i) $n\geq 2$일 때

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)\{(n+2)-(n-1)\}$$
$$=n(n+1)$$

(ii) $n=1$일 때

$$a_1=\sum_{k=1}^{1} a_k=\frac{1}{3}\times 1\times 2\times 3=2$$

이때 $a_1=2$는 (i)의 $a_n=n(n+1)$에 $n=1$을 대입한 결과와 같으므로

$a_n=n(n+1)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

따라서 $\frac{n}{n+1}=\frac{10}{11}$에서 $n=\mathbf{10}$

05 Action $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k-1}=\frac{1}{a_n-1}$을 이용한다.

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k-1}=n^2+2n$에서

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k-1}=\frac{1}{a_n-1}$이므로

$$\frac{1}{a_n-1}=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$
$$=n^2+2n-(n^2-2n+1+2n-2)$$
$$=2n+1$$

따라서 $a_n-1=\frac{1}{2n+1}$이므로

$$a_n=\frac{1}{2n+1}+1=\frac{2n+2}{2n+1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{2k+2}{2k+1}}{\frac{1}{2k+1}}=\sum_{k=1}^{n}(2k+2)$$
$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}+2\times n$$
$$=\mathbf{n^2+3n}$$

교육청 기출

06 Action $\sum_{k=a}^{b} a_k=\sum_{k=1}^{b} a_k-\sum_{k=1}^{a-1} a_k$를 이용한다.

$\sum_{k=a}^{12} k^2=\sum_{k=1}^{12} k^2-\sum_{k=1}^{a-1} k^2$이므로

$$\sum_{k=1}^{12} k^2+\sum_{k=2}^{12} k^2+\sum_{k=3}^{12} k^2+\cdots+\sum_{k=12}^{12} k^2$$
$$=\sum_{l=1}^{12}\left(\sum_{k=l}^{12} k^2\right)=\sum_{l=1}^{12}\left(\sum_{k=1}^{12} k^2-\sum_{k=1}^{l-1} k^2\right)$$
$$=\sum_{l=1}^{12}\left\{\frac{12\times 13\times 25}{6}-\frac{(l-1)l(2l-1)}{6}\right\}$$
$$=\sum_{l=1}^{12}\frac{3900-2l^3+3l^2-l}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\left\{3900\times 12-2\left(\frac{12\times 13}{2}\right)^2+3\times\frac{12\times 13\times 25}{6}-\frac{12\times 13}{2}\right\}$$
$$=7800-2028+325-13=\mathbf{6084}$$

다른 풀이

$\sum_{k=1}^{12} k^2+\sum_{k=2}^{12} k^2+\sum_{k=3}^{12} k^2+\cdots+\sum_{k=12}^{12} k^2=S$라 하자.

$$\begin{array}{rrrrr} 1^2 & +2^2 & +3^2 & +4^2 & +\cdots+12^2 \\ & 2^2 & +3^2 & +4^2 & +\cdots+12^2 \\ & & 3^2 & +4^2 & +\cdots+12^2 \\ & & & 4^2 & +\cdots+12^2 \\ & & & \cdots\cdots & \\ +) & & & & 12^2 \\ \hline \multicolumn{5}{r}{1^2\times 1+2^2\times 2+3^2\times 3+4^2\times 4+\cdots+12^2\times 12} \end{array}$$

위에서 알 수 있듯이 $S=1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+12^3$이므로

$$S=\sum_{k=1}^{12} k^3=\left(\frac{12\times 13}{2}\right)^2=78^2=6084$$

07 Action 수열의 일반항을 구한다.

수열 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3+5}, \frac{1}{3+5+7}, \cdots$에서

$3+5+\cdots+(2n+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=n^2+2n$

이므로 주어진 수열의 일반항은 $\rightarrow 2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$

$$\frac{1}{3+5+\cdots+(2n+1)}=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{3}+\frac{1}{3+5}+\frac{1}{3+5+7}+\cdots+\frac{1}{3+5+\cdots+19}$$
$$=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{144}{110}=\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{55}}$$

08 Action 이웃한 항끼리 소거되는 꼴을 만든다.

$\log_2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\log_2\frac{n}{n+1}=\log_2 n-\log_2(n+1)$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{\log_2 k-\log_2(k+1)\}$$
$$=(\log_2 1-\log_2 2)+(\log_2 2-\log_2 3)$$
$$+\cdots+\{\log_2 n-\log_2(n+1)\}$$
$$=-\log_2(n+1)$$

즉 $-\log_2(n+1)=-8$이므로

$n+1=2^8$ $\therefore n=2^8-1=\mathbf{255}$

평가원 기출

09 Action 몇 개의 항을 구해 규칙을 찾는다.

$a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$에서

$a_1=(-1)^{\frac{1\times2}{2}}=(-1)^1=-1$

$a_2=(-1)^{\frac{2\times3}{2}}=(-1)^3=-1$

$a_3=(-1)^{\frac{3\times4}{2}}=(-1)^6=1$

$a_4=(-1)^{\frac{4\times5}{2}}=(-1)^{10}=1$

$a_5=(-1)^{\frac{5\times6}{2}}=(-1)^{15}=-1$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $-1, -1, 1, 1, -1, -1, \cdots$이므로 $-1, -1, 1, 1$이 반복된다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{999}na_n=(-1-2+3+4)+(-5-6+7+8)$$
$$+\cdots+(-993-994+995+996)$$
$$-997-998+999$$
$$=4\times249-996=\mathbf{0}$$

($\frac{996}{4}=249$)

10 Action 첫째항부터 몇 개의 항을 구해 규칙을 찾는다.

소숫점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 0이 되는 수는 $\frac{1}{2}$보다 작아야 한다. 즉 $\log n<\frac{1}{2}$, $n<10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$에서 ($\sqrt{10}\fallingdotseq3.16$)

$a_1=a_2=a_3=0$이다.

소숫점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 1이 되는 수는 $\frac{1}{2}$ 이상이고 $\frac{3}{2}$보다 작아야 한다. 즉 $\frac{1}{2}\le\log n<\frac{3}{2}$, $10^{\frac{1}{2}}\le n<10^{\frac{3}{2}}$ ($10\sqrt{10}\fallingdotseq31.6$)

에서 $a_4=a_5=a_6=\cdots=a_{20}=1$이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=\underbrace{0+0+0}_{3\text{개}}+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{17\text{개}}=\mathbf{17}$$

11 Action 위에서부터 n번째 층에 있는 정육면체의 개수를 세어 본다.

위에서부터 n번째 층에 있는 정육면체의 개수를 a_n이라고 하면 수열 $\{a_n\}$은 $1, 3, 6, 10, \cdots$이므로 수열 $\{a_n\}$의 계차수열은 $2, 3, 4, \cdots$이다.

$$\therefore a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$
$$=1+\frac{(n-1)n}{2}+(n-1)$$
$$=\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n^2+n}{2}$$

따라서 9층까지 쌓는데 필요한 정육면체의 개수는

$$\sum_{k=1}^{9}\frac{k^2+k}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{9\times10}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(285+45)=\mathbf{165}$$

12 Action 모든 군의 첫째항과 끝항이 1이 되도록 군수열을 만든다.

모든 군의 첫째항과 끝항이 1이 되도록 군수열을 만들면

$(1), (1, 2, 1), (1, 2, 3, 2, 1), \cdots$

이때 n번째 군에는 $2n-1$개의 항이 있으므로 n번째 군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$$

따라서 제8군까지 항의 개수는 $8^2=64$이고, 제9군까지 항의 개수는 $9^2=81$이므로 제77항은 제9군의 항이고, 제9군의 17개 항 중에서 $77-64=13$에서 제13항이다.

이때 제9군을 써 보면

$1, 2, 3, \cdots, 7, 8, 9, 8, 7, 6, 5, \cdots, 2, 1$

(첫째항, 9번째 항, 13번째 항, 17번째 항)

따라서 주어진 수열의 제77항은 **5**이다.

13 Action n번째 행의 규칙을 파악하여 a_n을 구한다.

$n(n\ge2)$번째 행에는 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-2}$가 각각 2개씩 있고, 2^{n-1}이 1개 있다. 따라서 n번째 행에 있는 수들의 합 a_n은

$$a_n=2\times(1+2+2^2+\cdots+2^{n-2})+2^{n-1}$$
$$=2\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+2^{n-1}=2^n-2+2^{n-1}$$
$$=3\cdot2^{n-1}-2$$

$a_n<1000$에서

$3\cdot2^{n-1}-2<1000$ $\therefore 2^{n-1}<\frac{1002}{3}=334$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$이므로 $n-1$의 최댓값은 8이다.

따라서 n의 최댓값은 **9**이다.

14 Action n번째 줄의 순서쌍은 두 성분의 합이 2^n임을 이용한다.
위에서 n번째 줄에 있는 순서쌍은 두 성분의 합이 2^n이고, 순서쌍 $(10, 54)$에서 $10+54=64=2^6$이므로 순서쌍 $(10, 54)$는 위에서부터 6번째 줄에 있다. 또한 첫번째 성분이 10이므로 순서쌍 $(10, 54)$는 왼쪽에서 10번째에 있다.
$\therefore m=6, n=10$

15 Action 분모가 같은 항을 같은 군으로 묶는다.
주어진 수열에서 분모가 같은 항을 같은 군으로 묶으면 제 n군은 분모가 2^{n+1}이고 분자가 분모보다 작은 홀수인 분수를 작은 수부터 순서대로 나열한 수열이다. 이때 제 n군의 분자의 일반항을 $2k-1$이라고 하면 $2k-1<2^{n+1}$에서

$2k<2^{n+1}+1$, $k<2^n+\frac{1}{2}$ $\quad\therefore k\le 2^n$ ($\because k$는 자연수)

즉 제 n군에는 $\frac{1}{2^{n+1}}$, $\frac{3}{2^{n+1}}$, $\frac{5}{2^{n+1}}$, $\cdots$, $\frac{2\cdot 2^n-1}{2^{n+1}}$의 2^n개의 항이 있으므로 제 1군부터 제 n군까지의 항의 개수는

$2+4+8+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$

이고, $126=2^7-2$이므로 제 126항은 제 6군의 끝항이다.
따라서 첫째항부터 제 126항까지의 합은 제 1군부터 제 6군까지의 모든 항의 합과 같다.
한편 제 n군의 모든 항의 합을 a_n이라 하면 a_n의 분모는 2^{n+1}이고, 분자는 수열 1, 3, 5, $\cdots$, $2\cdot 2^n-1$, 즉 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 2^n항까지의 합이므로

$$a_n=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{3}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{2\cdot 2^n-1}{2^{n+1}}$$
$$=\frac{1}{2^{n+1}}\times\frac{2^n\{2\times 1+(2^n-1)\times 2\}}{2}=2^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 6항까지의 합, 즉 주어진 수열의 첫째항부터 제 126항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{6}2^{k-1}=\frac{2^6-1}{2-1}=63$

다른 풀이
수열 $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\cdots$에서 분모가 같은 항을 군으로 묶고, 제 n군의 모든 항의 합을 a_n이라 하면

$a_1=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$
$a_2=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=2$
$a_3=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+\cdots+\frac{13}{16}+\frac{15}{16}=4$
$a_4=\frac{1}{32}+\frac{3}{32}+\cdots+\frac{29}{32}+\frac{31}{32}=8$
……

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열을 이룬다.
이때 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 6항까지의 합이므로

$S_6=\frac{1\cdot(2^6-1)}{2-1}=63$

4. 수학적 귀납법과 순서도

개념 강화 드릴 1 본문 211쪽

01 (1) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열이므로
$a_n=1+2(n-1)=\mathbf{2n-1}$
(2) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 4인 등차수열이므로
$a_n=3+4(n-1)=\mathbf{4n-1}$
(3) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 7이고 공차가 -2인 등차수열이므로
$a_n=7-2(n-1)=\mathbf{-2n+9}$
(4) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 17이고 공차가 -4인 등차수열이므로
$a_n=17-4(n-1)=\mathbf{-4n+21}$

02 (1) $a_n=n+1$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=1+1=2$이고 공차가 1인 등차수열이므로 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는 $\mathbf{a_1=2}$, $\mathbf{a_{n+1}=a_n+1}$이다.
(2) $b_n=3n-2$에서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=3-2=1$이고 공차가 3인 등차수열이므로 수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는 $\mathbf{b_1=1}$, $\mathbf{b_{n+1}=b_n+3}$이다.
(3) $c_n=-n+10$에서 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 $c_1=-1+10=9$이고 공차가 -1인 등차수열이므로 수열 $\{c_n\}$의 귀납적 정의는 $\mathbf{c_1=9}$, $\mathbf{c_{n+1}=c_n-1}$이다.
(4) $d_n=11-4n$에서 수열 $\{d_n\}$은 첫째항이 $d_1=11-4=7$이고 공차가 -4인 등차수열이므로 수열 $\{d_n\}$의 귀납적 정의는 $\mathbf{d_1=7}$, $\mathbf{d_{n+1}=d_n-4}$이다.

03 (1) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열이므로 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는 $\mathbf{a_1=2}$, $\mathbf{a_{n+1}=a_n+3}$이다.
(2) 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열이므로 수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는 $\mathbf{b_1=1}$, $\mathbf{b_{n+1}=b_n+4}$이다.
(3) 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 7이고 공차가 -3인 등차수열이므로 수열 $\{c_n\}$의 귀납적 정의는 $\mathbf{c_1=7}$, $\mathbf{c_{n+1}=c_n-3}$이다.
(4) 수열 $\{d_n\}$은 첫째항이 14이고 공차가 -3인 등차수열이므로 수열 $\{d_n\}$의 귀납적 정의는 $\mathbf{d_1=14}$, $\mathbf{d_{n+1}=d_n-3}$이다.

04 (1) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이므로
$a_n=2\cdot 2^{n-1}=\mathbf{2^n}$
(2) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 3인 등비수열이므로
$a_n=1\cdot 3^{n-1}=\mathbf{3^{n-1}}$
(3) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 7이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로
$a_n=7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\mathbf{\frac{7}{2^{n-1}}}$

05 (1) $a_n=2^{n-1}$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=2^{1-1}=1$이고 공비가 2인 등비수열이므로 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는 $\boldsymbol{a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n}$이다.

(2) $b_n=3^n$에서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=3^1=3$이고 공비가 3인 등비수열이므로 수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는 $\boldsymbol{b_1=3,\ b_{n+1}=3b_n}$이다.

(3) $c_n=\frac{12}{2^n}$에서 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 $c_1=\frac{12}{2}=6$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 수열 $\{c_n\}$의 귀납적 정의는 $\boldsymbol{c_1=6,\ c_{n+1}=\frac{1}{2}c_n}$이다.

(4) $d_n=\frac{6}{3^n}$에서 수열 $\{d_n\}$은 첫째항이 $d_1=\frac{6}{3}=2$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로 수열 $\{d_n\}$의 귀납적 정의는 $\boldsymbol{d_1=2,\ d_{n+1}=\frac{1}{3}d_n}$이다.

06 (1) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이므로 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는 $\boldsymbol{a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n}$이다.

(2) 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열이므로 수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는 $\boldsymbol{b_1=2,\ b_{n+1}=3b_n}$이다.

(3) 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 32이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 수열 $\{c_n\}$의 귀납적 정의는 $\boldsymbol{c_1=32,\ c_{n+1}=\frac{1}{2}c_n}$이다.

07 (1) $\{a_n\}$: 1, 2, 4, 7, 11, 16, …이면
계차수열은 1, 2, **3**, 4, **5**, …이므로
계차수열의 일반항은 $\boldsymbol{n}$이다.
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$\boldsymbol{a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n}$이다.

(2) $\{a_n\}$: 2, 3, 5, 9, 17, 33, …이면
계차수열은 **1**, 2, 4, **8**, 16, …이므로
계차수열의 일반항은 2^{n-1}이다.
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$\boldsymbol{a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2^{n-1}}$이다.

08 (1) 수열 2, 2, 3, 5, 8, 12, …의 계차수열은 0, 1, 2, 3, 4, …이므로 계차수열의 일반항은 $n-1$이다.
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$\boldsymbol{a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+n-1}$이다.

(2) 수열 1, 8, 12, 13, 11, 6, …의 계차수열은 7, 4, 1, −2, −5, …이므로 계차수열의 일반항은 $-3n+10$이다. ← $7+(n-1)\times(-3)=10-3n$
따라서 수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는
$\boldsymbol{b_1=1,\ b_{n+1}=b_n-3n+10}$이다.

확인 문제 본문 213~220쪽

01-1 Action 점화식에서 계차수열의 일반항을 구한다.

(1) $a_{n+1}-a_n=2n-1$에서 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $b_n=2n-1$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$
$$=1+2\times\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$$
$$=1+n^2-n-n+1$$
$$=\boldsymbol{n^2-2n+2}$$

(2) $a_{n+1}-a_n=3^{n-1}$에서 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $b_n=3^{n-1}$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$$
$$=2+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=\frac{3^{n-1}-1+4}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3^{n-1}+3}{2}}$$

01-2 Action 첫째항의 k값에 주의한다.

$2S_{n+1}=S_{n+2}+S_n-3(n+1)$에서
$(S_{n+2}-S_{n+1})-(S_{n+1}-S_n)=3(n+1)$
이때 $S_{n+2}-S_{n+1}=a_{n+2}$, $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로
$a_{n+2}-a_{n+1}=3(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$
수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면
$b_{n+1}=3(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$
즉 $b_n=3n$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$이고, $b_1=a_2-a_1=6-3=3$이므로 $b_n=3n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}3k$$
$$=3+3\times\frac{(n-1)n}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}(n^2-n+2)}$$

02-1 Action 주어진 점화식을 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 꼴로 고친다.

(1) $(n+2)\cdot a_{n+1}=n\cdot a_n$에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2}$

이 식의 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-2$, $n-1$을 대입한 후 차례로 곱하면

$$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\frac{a_5}{a_4}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\cdots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}$$

즉 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{1\times2}{n(n+1)}$이고, 이때 $a_1=1$이므로

$$\boldsymbol{a_n=\frac{2}{n(n+1)}}$$

(2) $a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$

이 식의 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 대입한 후 차례로 곱하면

$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$

즉 $\frac{a_n}{a_1}=n$이고, 이때 $a_1=1$이므로 $\boldsymbol{a_n=n}$

2-2 Action $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$의 n 대신 1, 2, 3, …을 대입한다.

$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$

이 식의 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 대입한 후 차례로 곱하면

$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}$

즉 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{1}{n}$이고, 이때 $a_1=12$이므로 $a_n=\frac{12}{n}$

따라서 a_n이 정수일 때는 n이 12의 양의 약수인 1, 2, 3, 4, 6, 12일 때이므로 수열 $\{a_n\}$의 정수항은 **6**개이다.

쌤피 비법 확인 01

본문 215 쪽

(1) $a_{n+1}=\frac{a_n}{1-2a_n}$의 양변에 역수를 취하면

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1-2a_n}{a_n}$ $\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-2$

즉 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 1이고 공차가 -2인 등차수열이므로

$\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\times(-2)=-2n+3$

$\therefore a_n=\frac{1}{-2n+3}$

$\frac{1}{-2n+3}<-\frac{1}{100}$에서

$-2n+3>-100$, $2n<103$ $\therefore n<51.5$

따라서 자연수 n의 최댓값은 **51**

(2) $\frac{a_na_{n+1}}{2}=a_n-a_{n+1}$에서 양변을 a_na_{n+1}로 나누면

$\frac{1}{2}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$ $\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$

즉 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이므로

$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{3n-1}{6}$ $\therefore \boldsymbol{a_n=\frac{6}{3n-1}}$

쌤피 특강 확인 02

본문 216 쪽

(1) $a_{n+1}=3a_n-4$를 $a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}-\alpha=3a_n-3\alpha$ $\therefore a_{n+1}=3a_n-2\alpha$

따라서 $-2\alpha=-4$이므로 $\alpha=2$

$\therefore \boldsymbol{a_{n+1}-2=3(a_n-2)}$

(2) $a_{n+1}=-2a_n-1$을 $a_{n+1}-\alpha=-2(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}-\alpha=-2a_n+2\alpha$ $\therefore a_{n+1}=-2a_n+3\alpha$

따라서 $3\alpha=-1$이므로 $\alpha=-\frac{1}{3}$

$\therefore \boldsymbol{a_{n+1}+\frac{1}{3}=-2\left(a_n+\frac{1}{3}\right)}$

(3) $a_{n+1}=\frac{2}{5}a_n+3$을 $a_{n+1}-\alpha=\frac{2}{5}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}-\alpha=\frac{2}{5}a_n-\frac{2}{5}\alpha$ $\therefore a_{n+1}=\frac{2}{5}a_n+\frac{3}{5}\alpha$

따라서 $\frac{3}{5}\alpha=3$이므로 $\alpha=5$

$\therefore \boldsymbol{a_{n+1}-5=\frac{2}{5}(a_n-5)}$

(4) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{2}$을 $a_{n+1}-\alpha=\frac{2}{3}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}-\alpha=\frac{2}{3}a_n-\frac{2}{3}\alpha$ $\therefore a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{\alpha}{3}$

따라서 $\frac{\alpha}{3}=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha=\frac{3}{2}$

$\therefore \boldsymbol{a_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{3}{2}\right)}$

3-1 Action 점화식을 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$의 꼴로 변형한다.

(1) $a_{n+1}=-2a_n+3$을 $a_{n+1}-\alpha=-2(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}=-2a_n+3\alpha$ $\therefore \alpha=1$

따라서 $a_{n+1}-1=-2(a_n-1)$이고, 이때 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=3-1=2$이고, 공비가 -2인 등비수열이므로

$a_n-1=2\times(-2)^{n-1}=-(-2)^n$

$\therefore \boldsymbol{a_n=1-(-2)^n}$

다른 풀이

$a_{n+1}=-2a_n+3$ …… ㉠에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$a_{n+2}=-2a_{n+1}+3$ …… ㉡

㉡−㉠에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)$

이때 $a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}=-2b_n$

또한 $a_1=3$이고, ㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_2=-3$이므로

$b_1=a_2-a_1=-3-3=-6$

즉 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 -6이고 공비가 -2인 등비수열이므로

$b_n=-6\times(-2)^{n-1}$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}(-6)\times(-2)^{k-1}$

$=3+\dfrac{-6\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}$

$=3-2-(-2)^n=1-(-2)^n$

(2) $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+4$를 $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{3}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}\alpha$ $\therefore \alpha=6$

따라서 $a_{n+1}-6=\dfrac{1}{3}(a_n-6)$이고, 이때 수열 $\{a_n-6\}$은 첫째항이 $a_1-6=15-6=9$이고 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n-6=9\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-3}$ $\therefore a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-3}+6$

다른 풀이

$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+4$ …… ㉠에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$a_{n+2}=\dfrac{1}{3}a_{n+1}+4$ …… ㉡

㉡−㉠에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$

이때 $a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$

또한 $a_1=15$이고, ㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_2=9$이므로

$b_1=a_2-a_1=9-15=-6$

즉 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 -6이고 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$b_n=(-6)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=15+\sum_{k=1}^{n-1}(-6)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$

$=15+\dfrac{-6\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}$

$=15-9+9\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=6+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-3}$

3-2 Action 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용한다.

$a_{n+1}=S_n+1$에서 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로

$S_{n+1}-S_n=S_n+1$ $\therefore S_{n+1}=2S_n+1$

이때 $S_{n+1}-\alpha=2(S_n-\alpha)$로 놓으면

$S_{n+1}=2S_n-\alpha$ $\therefore \alpha=-1$

따라서 $S_{n+1}+1=2(S_n+1)$이고, 이때 수열 $\{S_n+1\}$은 첫째항이 $S_1+1=a_1+1=1+1=2$이고 공비가 2인 등비수열이므로

$S_n+1=2\cdot2^{n-1}=2^n$ $\therefore S_n=2^n-1$

$\therefore S_{10}=2^{10}-1=\mathbf{1023}$

다른 풀이 1

$S_{n+1}=2S_n+1$ …… ㉠에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$S_{n+2}=2S_{n+1}+1$ …… ㉡

㉡−㉠에서 $S_{n+2}-S_{n+1}=2(S_{n+1}-S_n)$

이때 $S_{n+1}-S_n=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}=2b_n$

또한 $S_1=a_1=1$이고, ㉠에 $n=1$을 대입하면 $S_2=3$이므로

$b_1=S_2-S_1=3-1=2$

즉 수열 $\{S_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n=2\times2^{n-1}=2^n$

$\therefore S_n=S_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$=1+\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$=2^n-1$

$\therefore S_{10}=2^{10}-1=1023$

다른 풀이 2

$a_{n+1}=S_n+1$ …… ㉠에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$a_{n+2}=S_{n+1}+1$ …… ㉡

㉡−㉠에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이고, 이때

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}$

$\therefore a_{n+2}=2a_{n+1}(n=1, 2, 3, \cdots)$

또한 $S_1=a_1=1$이고, ㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_2=2$이므로

$a_{n+1}=2a_n(n=1, 2, 3, \cdots)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n=2^{n-1}$이다.

$\therefore S_{10}=\sum_{k=1}^{10}2^{k-1}=\dfrac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1}$

$=2^{10}-1=1023$

4-1 Action $a_{n+2}-a_{n+1}=k(a_{n+1}-a_n)$ 꼴로 변형한다.

(1) $a_{n+2}-5a_{n+1}+4a_n=0$에서

$a_{n+2}-(a_{n+1}+4a_{n+1})+4a_n=0$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$

이때 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_{n+1}=4b_n$, $b_1=a_2-a_1=5-2=3$

즉 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 4인 등비수열이므로

$b_n=3\times4^{n-1}$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(3\cdot4^{k-1})$

$=2+\dfrac{3(4^{n-1}-1)}{4-1}$

$=2+4^{n-1}-1=\mathbf{1+4^{n-1}}$

(2) $3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$에서

$3a_{n+2}-(3a_{n+1}+a_{n+1})+a_n=0$

$\therefore 3(a_{n+2}-a_{n+1})=a_{n+1}-a_n$

이때 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$3b_{n+1}=b_n$, $b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$, $b_1=a_2-a_1=2-4=-2$

즉 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 -2, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$b_n=-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{2}{3^{n-1}}$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=4-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3^{k-1}}\right)$

$=4-\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=4-3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$=1+\frac{1}{3^{n-2}}$

04-2 Action $3a_{n+1}$을 a_{n+1}과 $2a_{n+1}$로 분리한다.

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$에서

$a_{n+2}-(a_{n+1}+2a_{n+1})+2a_n=0$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

이때 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_{n+1}=2b_n$, $b_1=a_2-a_1=3-1=2$

즉 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n=2\times2^{n-1}=2^n$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$=2^n-1$

이때 $a_n\geq100$에서 $2^n-1\geq100$, $2^n\geq101$ $\therefore n\geq7$

따라서 수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 100 이상이 되는 항은 제**7**항이다.

샘파특강 확인 03 본문 219 쪽

(1) $a_{n+1}=4a_n+2\times3^n$의 양변을 3^{n+1}으로 나누면

$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{4}{3}\times\frac{a_n}{3^n}+\frac{2}{3}$

이 식에서 $\frac{a_n}{3^n}=b_n$ …… ㉠이라 하면 $b_{n+1}=\frac{4}{3}b_n+\frac{2}{3}$

$b_{n+1}-\alpha=\frac{4}{3}(b_n-\alpha)$에서

$b_{n+1}=\frac{4}{3}b_n-\frac{\alpha}{3}$ $\therefore \alpha=-2$

따라서 $b_{n+1}+2=\frac{4}{3}(b_n+2)$이다.

이때 $b_1+2=\frac{a_1}{3}+2=\frac{6}{3}+2=4$에서 수열 $\{b_n+2\}$는 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{4}{3}$인 등비수열이므로

$b_n+2=4\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}=\frac{2^{2n}}{3^{n-1}}$ $\therefore b_n=\frac{2^{2n}}{3^{n-1}}-2$

㉠에서 $a_n=b_n\times3^n$이므로

$a_n=\left(\frac{2^{2n}}{3^{n-1}}-2\right)\times3^n=\mathbf{3\times2^{2n}-2\times3^n}$

(2) $na_{n+1}=(n+1)a_n+2$의 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n(n+1)}$

이 식에서 $\frac{a_n}{n}=b_n$ …… ㉠이라 하면 $b_{n+1}=b_n+\frac{2}{n(n+1)}$

이때 $\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$이므로

$b_{n+1}-b_n=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore b_n=b_1+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$b_1=\frac{a_1}{1}=1$

$=1+2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$

$=1+2\left(1-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{2}{n}$

㉠에서 $a_n=n\cdot b_n$이므로 $a_n=n\left(3-\frac{2}{n}\right)=\mathbf{3n-2}$

(3) $a_{n+1}=3a_n{}^2$의 양변에 3을 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_3 a_{n+1}=\log_3 3a_n{}^2$ $\therefore \log_3 a_{n+1}=1+2\log_3 a_n$

이 식에서 $\log_3 a_n=b_n$ …… ㉠이라 하면

$b_{n+1}=2b_n+1$이고, $b_{n+1}-\alpha=2(b_n-\alpha)$에서

$b_{n+1}=2b_n-\alpha$ $\therefore \alpha=-1$

따라서 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$이다.

이때 $b_1+1=\log_3 a_1+1=\log_3 1+1=1$에서 수열 $\{b_n+1\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n+1=1\times2^{n-1}$ $\therefore b_n=2^{n-1}-1$

㉠에서 $a_n=3^{b_n}$이므로 $\boldsymbol{a_n=3^{2^{n-1}-1}}$

05-1 Action $n-1$개의 직선에 의해 분할된 평면의 수를 a_{n-1}로 놓는다.

조건에 맞게 $n-1$개의 직선을 그리고, 분할된 평면의 수를 a_{n-1}로 놓자. 1개의 직선을 더 그으면 새로운 평면이 n개가 더 생긴다. 이때 $a_n=a_{n-1}+n$을 만족시킨다.

여기서 $b_{n-1}=a_n-a_{n-1}=n$이므로 계차수열 $\{b_n\}$의 일반항 $b_n=n+1$이고, 원수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

$=2+\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)=\frac{n^2+n+2}{2}$

$\therefore a_{20}=\frac{20^2+20+2}{2}=\frac{422}{2}=\mathbf{211}$

05-2 Action n시간 후의 세포의 수를 a_n이라 하면 $n+1$시간 후의 전체 세포 수는 $a_{n+1}=2(a_n-2)$이다.

n시간 후의 세포의 수를 a_n이라고 하면 $a_{n+1}=2(a_n-2)$에서
$a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$, $a_{n+1}=2a_n-\alpha$ $\therefore \alpha=4$
따라서 $a_{n+1}-4=2(a_n-4)$이고, 이때 $a_1=(6-2)\times2=8$에서 수열 $\{a_n-4\}$는 첫째항이 $a_1-4=8-4=4$이고 공비가 2인 등비수열이므로
$a_n-4=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$ $\therefore a_n=4+2^{n+1}$
$4+2^{n+1}>1000$에서 $2^{n+1}>996$
이때 $2^9<996<2^{10}$이므로 $n+1\geq10$ $\therefore n\geq9$
따라서 전체 세포가 처음으로 1000개보다 많아지는 것은 **9**시간 후이다.

쌍둥이 특강 확인 04

본문 221 쪽

1. 계단을 한 계단 또는 두 계단 씩 오를 때, n개의 계단을 오르는 방법의 수를 a_n이라고 하자.
n개의 계단을 오를 때
(i) 처음에 한 계단을 오르면 $n-1$개의 계단이 남고 $n-1$개의 계단을 오르는 방법의 수는 a_{n-1}이다.
(ii) 처음에 두 계단을 오르면 $n-2$개의 계단이 남고 $n-2$개의 계단을 오르는 방법의 수는 a_{n-2}이다.
이때 (i)과 (ii)는 동시에 일어나지 않으므로 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$가 성립하고, $a_1=1$, $a_2=2$이므로 $a_3=3$, $a_4=5$, $a_5=8$, $a_6=13$, $a_7=21$, $a_8=34$, $a_9=55$, $a_{10}=$**89**
2. $n\geq3$일 때, 주어진 규칙에 맞게 나열해 보면
$a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=2$이므로 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$을 이용하여
a_4, a_5, a_6, …, a_{10}을 차례로 구하면
$a_4=3$, $a_5=5$, $a_6=8$, $a_7=13$, $a_8=21$, $a_9=34$, $a_{10}=$**55**

개념 강화 드릴 ②

본문 223 쪽

01 조건 ❶에서 $p(1)$이 성립한다.
$p(1)$이 성립하므로 조건 ❷에 의해 $p(2)$가 성립하고,
$p(2)$가 성립하므로 조건 ❷에 의해 $p(4)$가 성립한다.
또한 $p(4)$가 성립하므로 조건 ❷에 의해 $p(8)$이 성립한다.
따라서 반드시 성립하는 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

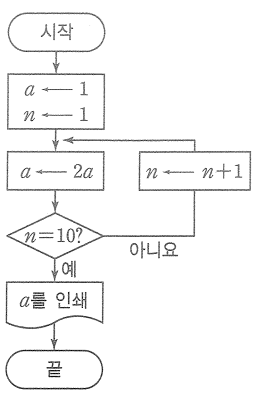
참고
$p(6)$이 성립한다는 결론을 얻으려면 $p(3)$이 성립한다는 조건이 있어야 한다. 그러나 주어진 조건에서 $p(3)$이 성립한다는 결론은 얻을 수가 없다. 그러나 이것은 $p(6)$이 절대 성립하지 않는다는 뜻은 아니고 주어진 조건에서는 $p(6)$이 반드시 성립한다는 결론을 얻을 수 없다는 뜻이다. 즉 $p(6)$은 성립하는지, 성립하지 않는지 알 수 없다.

02 (1) $f(k)=k^2$이고
$f(k+1)=(k+1)^2=k^2+2k+1$이므로
$f(k+1)-f(k)=k^2+2k+1-k^2=2k+1$에서
$f(k+1)=f(k)+\boldsymbol{2k+1}$이다.
(2) $f(k)=\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{k^2+k}{2}$이고
$f(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}=\dfrac{k^2+3k+2}{2}$이므로
$f(k+1)-f(k)=\dfrac{k^2+3k+2}{2}-\dfrac{k^2+k}{2}=k+1$에서
$f(k+1)=f(k)+\boldsymbol{k+1}$이다.

03 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$에서
(i) $n=1$일 때
(좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$
따라서 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ …… ㉠
㉠의 양변에 $2(k+1)-1$, 즉 $\boldsymbol{2k+1}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$
$=k^2+(2k+1)=k^2+2k+1$
$=\boldsymbol{(k+1)^2}$
따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

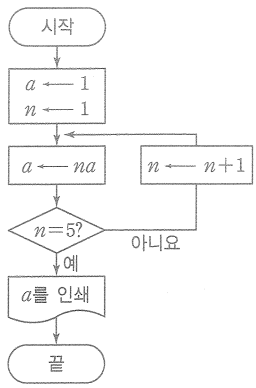
04 오른쪽 순서도에서 기호 ◇에 도달했을 때 a와 n의 값은 다음 표와 같다.

n	a
1	2
2	2^2
3	2^3
4	2^4
5	2^5
6	2^6
7	2^7
8	2^8
9	2^9
10	2^{10}



05 오른쪽 순서도에서 기호 ◇에 도달했을 때 a와 n의 값은 다음 표와 같다.

n	a
1	1
2	1×2
3	$1\times2\times3$
4	$1\times2\times3\times4$
5	$1\times2\times3\times4\times5$



확인 문제 본문 225~228쪽

06-1 Action $n=k$일 때 성립하는 등식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더한다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

이 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

06-2 Action $3^{k+1}+4^{2k-1}=13m$(m은 자연수)으로 놓는다.

$p(n)=3^{n+1}+4^{2n-1}$으로 놓자.

(i) $n=1$일 때, $p(1)=3^2+4^1=13$이므로 $p(n)$은 13의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, $p(k)$가 13의 배수라 가정하고

$p(k)=3^{k+1}+4^{2k-1}=13m$($m$은 자연수)으로 놓으면

$$\begin{aligned}p(k+1)&=3^{k+2}+4^{2k+1}\\&=3\times3^{k+1}+4^2\times4^{2k-1}\\&=3\times3^{k+1}+3\times4^{2k-1}+13\times4^{2k-1}\\&=3(3^{k+1}+4^{2k-1})+13\times4^{2k-1}\\&=3\times13m+13\times4^{2k-1}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 $p(n)$은 13의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 13의 배수이다.

07-1 Action $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하고 양변에 $1+h$를 곱한다.

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$, (우변)$=1+2h$

이때 $h^2>0$이므로 (좌변)>(우변)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$ …… ㉠

$1+h>0$이므로 부등식 ㉠의 양변에 $1+h$를 곱하면

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}&=(1+h)^k(1+h)\\&>(1+kh)(1+h)\\&=1+(k+1)h+kh^2\\&>1+(k+1)h\end{aligned}$$

$\therefore (1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

07-2 Action $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하고 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더한다.

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이므로

(좌변)<(우변)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$이고, 이 부등식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

그런데 $k\geq2$일 때,

$$\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$=\frac{-(k+1)^2+k(k+1)+k}{k(k+1)^2}=\frac{-1}{k(k+1)^2}<0$$

이므로 $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$이 성립한다.

$$\therefore \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

08-1 Action 루프를 빠져 나오기 전의 n의 값에 대하여 인쇄되는 값을 반드시 확인한다.

S의 초깃값이 0이므로 새로 더해지는 값 1^2, 2^2, …, 100^2의 수열의 일반항은 $a_n=n^2$이다. 이때 연산기 앞에 있는 카운터에 의해 n의 초깃값 $n=0$이 $n=1$로 바뀌므로 연산기는 새로 더해지는 값을 고려하여 $S \leftarrow S+n^2$ 꼴을 생각한다. 이 경우

$n=1$일 때, $S=0+1^2=1^2$

$n=2$일 때, $S=1^2+2^2$

……

$n=99$일 때, $S=S+99^2$

$n=100$일 때, $S=S+100^2$

이므로 루프 관리기는 '$n=100$?' 꼴이어야 한다.

∴ (ㄱ)$=n^2$, (ㄴ)$=100$

09-1 Action 두 변수 n, S의 값의 변화를 표로 만들어 규칙을 찾는다.

순서도에서 루프 관리기 '$n=10$?'에 도달할 때의 n과 S의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

n	S
1	1
2	1+3
3	1+3+5
4	1+3+5+7
⋮	⋮
9	1+3+5+…+17
10	1+3+5+…+17+19

따라서 주어진 순서도에 의해 인쇄되는 S의 값은

$$S=1+3+5+\cdots+19=\frac{10\times(1+19)}{2}=100$$

다른 풀이

연산자가 $S \leftarrow S+f(n)$ 꼴이므로 인쇄되는 S의 값은

$$S=0+\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=2\times\frac{10\times11}{2}-10=100$$

(S의 초깃값)

LECTURE **카운터 '$n \leftarrow n+1$'의 위치와 연산**

순서도에서는 카운터 '$n \leftarrow n+1$'의 위치에 주의해야 한다.

예제에서는 카운터 '$n \leftarrow n+1$'의 바로 뒤에 루프 관리기 '$n=10$?'이 있으므로 n의 값이 10이 된 다음 S의 값에는 더 이상 변화를 주지 않고 S의 값을 인쇄한다.

하지만 확인 문제 09-1에서는 카운터 '$n \leftarrow n+1$' 다음 연산기 '$S \leftarrow S+2n-1$'을 한 번 더 거치고 루프 관리기 '$n=10$?'에 가도록 되어 있으므로 n의 값이 10이 된 다음 S에 $2n-1=2\times10-1=19$를 더해 준 다음 S의 값을 인쇄한다.

09-2 Action 두 변수 n, a의 값의 변화를 표로 만들어 규칙을 찾는다.

순서도에서 루프 관리기 '$n=10$?'에 도달할 때의 n과 a의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

n	a
1	1
2	$\frac{1}{2}\times1$
3	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1$
4	$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1$
⋮	⋮
10	$\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\cdots\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1$

따라서 주어진 순서도에 의해 인쇄되는 a의 값은

$$a=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\cdots\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{10}$$

참고

$n=9$를 연산기 '$a \leftarrow \frac{n}{n+1}a$'에 대입한 후 그 다음 과정에서 카운터 '$n \leftarrow n+1$'에 의해 $n=10$이 되므로 루프를 벗어나게 된다.

따라서 이때 $\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\cdots\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1$의 결과인 $\frac{1}{10}$을 인쇄하게 된다.

기본강화 본문 230~231쪽

평가원 기출

01 Action $S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}+a_n$을 이용한다.

$(S_{n+1}-S_{n-1})^2=4a_na_{n+1}+4$에서

$S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}+a_n$이므로

$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+4$

$a_{n+1}^2+2a_na_{n+1}+a_n^2-4a_na_{n+1}=4$

$a_{n+1}^2-2a_na_{n+1}+a_n^2=4$

$(a_{n+1}-a_n)^2=4$

∴ $a_{n+1}-a_n=2$ ($\because a_n<a_{n+1}$)

즉 수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이다.

이때 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1이므로

$a_n=1+2(n-1)=2n-1$

∴ $a_{20}=2\times20-1=39$

참고

$S_{n+1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n+a_{n+1}$,

$S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$이므로

$S_{n+1}-S_{n-1}=a_n+a_{n+1}$

02 Action 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이 $\{b_n\}$일 때, $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}$에서

$b_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}$

$\therefore a_{10}=\frac{3}{2}-\frac{1}{10}=\frac{7}{5}$

03 Action 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이 $\{b_n\}$일 때, $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$a_{n+1}-a_n=2n$에서 $b_n=2n$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k$

$=0+2\times\frac{(n-1)n}{2}=(n-1)n$

이때 $a_{k+1}=k(k+1)$이므로

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

04 Action 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용한다.

$2S_n=(n+1)a_n$에서 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq2)$이므로

$2S_n=(n+1)(S_n-S_{n-1})$, $(n-1)S_n=(n+1)S_{n-1}$

따라서 $n\geq2$일 때

$S_n=\frac{n+1}{n-1}S_{n-1}$

$=\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n}{n-2}S_{n-2}$

$=\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n-1}{n-3}S_{n-3}$

$=\cdots\cdots$

$=\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n-1}{n-3}\times\cdots\times\frac{4}{2}\times\frac{3}{1}S_1$ ($S_1=a_1=1$)

$=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore S_{100}=\frac{100\times101}{2}=5050$

다른 풀이

$2S_n=(n+1)a_n$ …… ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로 n대신 $n+1$을 대입하면

$2S_{n+1}=(n+2)a_{n+1}$ …… ㉡

㉡−㉠에서

$2(S_{n+1}-S_n)=(n+2)a_{n+1}-(n+1)a_n$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로

$2a_{n+1}=(n+2)a_{n+1}-(n+1)a_n$ $\therefore na_{n+1}=(n+1)a_n$

즉 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$이고, 이 식의 양변에 n대신 1, 2, 3, …, $(n-1)$을 대입하여 차례로 곱하면

$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$

따라서 $\frac{a_n}{a_1}=n$이고, 이때 $a_1=1$이므로 $a_n=n$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=\sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=1}^{100}k=\frac{100\times101}{2}=5050$

05 Action 점화식의 양변을 a_na_{n+1}로 나눈다.

$2a_na_{n+1}-a_{n+1}+a_n=0$ …… ㉠에서 $a_n\neq0$이므로 ㉠의 양변을 a_na_{n+1}로 나누면

$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=-2$

즉 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 공차가 -2인 등차수열이므로

$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\times(-2)=-2n+\frac{5}{2}$

$\therefore a_n=\frac{1}{-2n+\frac{5}{2}}=\frac{2}{-4n+5}$

㉠에서 $a_na_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

$\therefore a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{10}a_{11}$

$=\frac{1}{2}\{(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{11}-a_{10})\}$

$=\frac{1}{2}(a_{11}-a_1)$

이때 $a_{11}=\frac{2}{-4\times11+5}=-\frac{2}{39}$, $a_1=2$이므로

$\frac{1}{2}(a_{11}-a_1)=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{39}-2\right)=-\frac{40}{39}$

06 Action $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$로 놓고 α의 값을 구한다.

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-1$을 $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{\alpha}{2}$ $\therefore\alpha=-2$

따라서 $a_{n+1}+2=\frac{1}{2}(a_n+2)$이고, 이때 수열 $\{a_n+2\}$는 첫째항이 $a_1+2=6+2=8$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n+2=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{8}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-4}}$ $\therefore a_n=\frac{1}{2^{n-4}}-2$

$\therefore a_7=\frac{1}{2^{7-4}}-2=\frac{1}{8}-2=-\frac{15}{8}$

07 Action 점화식을 $a_{n+2}-a_{n+1}=r(a_{n+1}-a_n)$꼴로 변형한다.

$a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$에서

$a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)$

이때 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_{n+1}=-2b_n$, $b_1=a_2-a_1=4-1=3$

즉 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3이고 공비가 -2인 등비수열이므로

$b_n=3\times(-2)^{n-1}$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\{3\times(-2)^{k-1}\}$

$=1+\frac{3\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}=1+1-(-2)^{n-1}$

$=2-(-2)^{n-1}$

08 Action 점화식의 양변에 밑이 2인 로그를 취한다.

$a_{n+1}=2a_n^2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2a_n^2$, $\log_2 a_{n+1}=\log_2 2+\log_2 a_n^2$

$\therefore \log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n+1$ …… ㉠

㉠에서 $\log_2 a_n=b_n$ …… ㉡이라 하면

$b_{n+1}=2b_n+1$이고, $b_{n+1}-\alpha=2(b_n-\alpha)$에서

$b_{n+1}=2b_n-\alpha$ $\therefore \alpha=-1$

따라서 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$이다.

이때 $b_1+1=\log_2 a_1+1=\log_2 2+1=2$이므로 수열 $\{b_n+1\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이다. 즉

$b_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ $\therefore b_n=2^n-1$

㉡에서 $a_n=2^{b_n}$이므로 $a_n=2^{2^n-1}$

$\therefore \log_4(1+\log_2 a_8)=\log_4(1+\log_2 2^{2^8-1})$

$=\log_4\{1+(2^8-1)\}$

$=\log_4 2^8=\log_{2^2}2^8$

$=\frac{8}{2}\log_2 2=4$

평가원 기출

09 Action 주어진 관계식의 양변에 역수를 취한다.

$a_{n+1}=\frac{10A\cdot a_n}{10A+a_n}$의 양변에 역수를 취하면

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{10A+a_n}{10A\cdot a_n}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{10A}$

즉 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 공차가 $\frac{1}{10A}$인 등차수열이다.

이때 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 첫째항이 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{10A}$이므로

$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{10A}+(n-1)\frac{1}{10A}=\frac{n}{10A}$

따라서 $a_n=\frac{10A}{n}$이고, 0.8에 해당하는 문자의 크기는 a_8이므로

$a_8=\frac{10A}{8}=\frac{5}{4}A$

10 Action 주어진 조건에 의해 어느 때 명제 $p(n)$이 반드시 성립하는지 살펴본다.

❶에서 $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립하고,

❷에서 $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립하면

$n=3k$일 때 명제 $p(n)$이 성립하므로

$n=3, 3^2, 3^3, \cdots$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

또한 ❶에서 $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립하고,

❷에서 $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립하면

$n=5k$일 때 명제 $p(n)$이 성립하므로 $n=5, 5^2, 5^3, \cdots$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

또한 $n=3$일 때 명제 $p(n)$이 성립하므로

$n=3\times5, 3\times5^2, 3\times5^3\cdots$일 때 명제 $p(n)$이 성립하고,

$n=3^2\times5, 3^2\times5^2, 3^2\times5^3, \cdots, 3^3\times5, 3^3\times5^2, \cdots$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

따라서 $m=0, 1, 2, \cdots$, $l=0, 1, 2, \cdots$에 대하여

$n=3^m\times5^l$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

이때 $27=3^3$, $45=3^2\times5$, $81=3^4$, $90=2\times3^2\times5$이므로 주어진 보기 중 명제 $p(n)$이 반드시 성립하는 경우는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 Action 주어진 등식이 $n=k$일 때 성립한다고 가정하고 양변에 $(k+1)(k+2)$를 더한다.

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1\times2=2$, (우변)$=\frac{1}{3}\times1\times2\times3=2$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1\times2+2\times3+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

이 식의 양변에 $(k+1)(k+2)$를 더하면

$1\times2+2\times3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$

$=(k+1)(k+2)\left(\frac{1}{3}k+1\right)$

$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

12 Action 변수 S의 초깃값이 얼마여야 할지 생각해 본다.

n의 초깃값이 0이고 S의 초깃값을 a라고 하면 새로 더해지는 값 1, 2, …, 100은 첫째항이 1이고, 공차가 1인 등차수열을 따른다. 따라서 이 수열의 일반항은 $a_n=1+(n-1)=n$이다.
따라서 연산기는 새로 더해지는 값을 고려하여 (나)에는 '$S \leftarrow S+n$'의 꼴이 들어가야 한다. 이때 루프 관리기 '$n=100$?'에 도달할 때의 n과 S의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

n	S
1	$a+1$
2	$a+1+2$
3	$a+1+2+3$
·····	·····
100	$a+1+2+3+\cdots+100$

이 순서도가 1부터 100까지의 합을 구하는 순서도이므로 S의 초깃값은 0이 들어가야 한다
∴ (가) ⇨ 0, (나) ⇨ $S+n$

13 Action 변수 S, n의 값이 변화하는 과정을 표로 만들어 규칙을 찾는다.

순서도에서 루프 관리기 '$n=8$?'에 도달할 때의 n과 S의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

n	S
1	$\frac{2}{1\times3}$
2	$\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{2\times4}$
3	$\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{2\times4}+\frac{2}{3\times5}$
·····	·····
8	$\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{2\times4}+\cdots+\frac{2}{8\times10}$

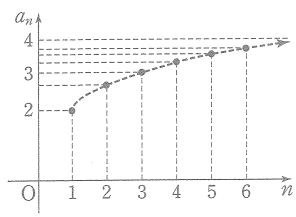
따라서 인쇄되는 S의 값은

$$S=\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{2\times4}+\frac{2}{3\times5}+\cdots+\frac{2}{7\times9}+\frac{2}{8\times10}$$
$$=\sum_{k=1}^{8}\frac{2}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$$
$$=\frac{90+45-10-9}{90}=\frac{116}{90}=\frac{58}{45}$$

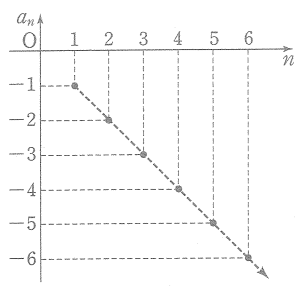
Ⅳ 수열의 극한

1. 무한수열의 극한

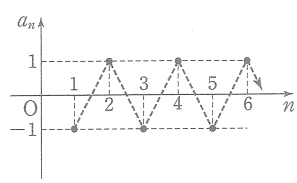
개념 강화 드릴 ① 본문 235쪽

01 (1) 

따라서 주어진 수열은 4로 수렴한다.

(2) 

따라서 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

(3) 

따라서 주어진 수열은 발산(진동)한다.

02 (1) 무한수열 $\left\{\frac{n^2+1}{2n}\right\}$은 $\frac{2}{2}, \frac{5}{4}, \frac{10}{6}, \frac{17}{8}, \frac{26}{10}, \cdots$이므로 양의 무한대로 발산한다.

(2) 무한수열 $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$은 $1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \cdots$이므로 수렴하고 그 극한값은 0이다.

(3) 무한수열 $\{1+(-1)^n\}$은 0, 2, 0, 2, 0, …이므로 발산(진동)한다.

(4) 무한수열 $\{\cos n\pi\}$는 $-1, 1, -1, 1, -1, \cdots$이므로 발산(진동)한다.

03 수열 $\{a_n\}$: $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \cdots$ ⇨ 일반항 $a_n=\frac{2n-1}{n}$

수열 $\{b_n\}$: $\frac{3}{1}, \frac{4}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \cdots$ ⇨ 일반항 $b_n=\frac{n+2}{n}$

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n=2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=3$, $\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=1$

(2) $a_n+b_n=\dfrac{2n-1}{n}+\dfrac{n+2}{n}=\dfrac{3n+1}{n}$

$a_n-b_n=\dfrac{2n-1}{n}-\dfrac{n+2}{n}=\dfrac{n-3}{n}$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n}=3$

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n-3}{n}=1$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$

$\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$

04 (1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n}=\dfrac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{3}\times 0=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-2\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}2=0-2=-2$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$

$=\dfrac{1+0}{1-0}=1$

05 (1) 분모의 최고차항 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+n}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{6+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\dfrac{6+0}{2+0}=3$

(2) 분모의 최고차항 n으로 분모, 분자를 나누면

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{1-n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{n}}{\frac{1}{n}-1}=\dfrac{2+0}{0-1}=-2$

(3) 분모의 최고차항 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=\dfrac{0-0}{1+0}=0$

(4) 분모의 최고차항 n으로 분모, 분자를 나누면

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2}{3n+5}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+\frac{2}{n}}{3+\frac{5}{n}}=\infty$ (극한값은 없다.)

(5) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$ → 분모의 최고차항 n으로 분자, 분모를 나눈다.

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$

(6) 다항식의 최고차항 n^2으로 묶어내면

$\lim_{n\to\infty}(n^2-n+1)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$

$=\infty$ (극한값은 없다.)

확인 문제 본문 236~242쪽

01-1 Action $\lim_{n\to\infty} a_n$을 바로 구할 수 없으면 항들을 나열해 본다.

ㄱ. 수열 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$는 1, 0, −1, 0, 1, 0, −1, 0, 1, …이므로 발산(진동)한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=2$ (수렴)

ㄷ. 수열 $\{5-(-1)^n\}$은 6, 4, 6, 4, …이므로 발산(진동)한다.

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left\{5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=0$ (수렴)

ㅁ. 수열 $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$은 1, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{4}$, …이므로 0에 수렴한다.

ㅂ. $\lim_{n\to\infty}(n-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{1}{n}-1\right)=-\infty$ (발산)

따라서 보기 중 수렴하는 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

02-1 Action $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}$을 이용한다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=-2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=2$에서 → 극한값의 기본 성질을 이용할 수 있다.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-b_n}{a_nb_n+1}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)}{\lim_{n\to\infty}(a_nb_n+1)}$

$=\dfrac{2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}1}$

$=\dfrac{2\times(-2)-2}{-2\times 2+1}=2$

2-2 Action 곱셈 공식 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$를 이용한다.

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=-3$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2$에서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)&=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}\\&=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n\\&=-3\times(-3)-2\times2=\mathbf{5}\end{aligned}$$

3-1 Action $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

(1) 분모의 최고차항 n^3으로 분모, 분자를 나누면

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(3n+2)(5n+3)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(5+\frac{3}{n}\right)}\\&=\frac{(1-0)(1-0)(1-0)}{(1+0)(3+0)(5+0)}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}}\end{aligned}$$

(2) 분모의 최고차항 n으로 분모, 분자를 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+n}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{3n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{3}{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+0}}{\sqrt{1-0}+0}=\sqrt{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{(n+1)(2n+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}\\&=\frac{6}{(1+0)\times(2+0)}=\mathbf{3}\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}(\text{분자})&=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)}{n^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{3n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{3}=\frac{1\times1}{3}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\end{aligned}$$

4-1 Action 분자 또는 분모를 유리화한다.

(1) $$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3-n}{n+1-n}\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\right)\\&=3\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\\&=3\times\frac{1+1}{1+1}=\mathbf{3}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}1+3+\cdots+(2n-1)&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\\&=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3+5+\cdots+(2n+1)&=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&=2\times\frac{n(n+1)}{2}+n=n^2+2n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\text{주어진 식})&=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+2n})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+2n})}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+2n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2+2n)}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+2n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+2n}}\\&=\frac{-2}{1+1}=\mathbf{-1}\end{aligned}$$

4-2 Action 주어진 수열의 일반항부터 구한다.

수열 $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$, $\frac{1}{3-\sqrt{6}}$, $\frac{1}{4-\sqrt{11}}$, $\frac{1}{5-\sqrt{18}}$, $\cdots$에서 수열 2, 3, 6, 11, 18, $\cdots$은 계차가 1, 3, 5, 7, $\cdots$이므로 (→ 계차수열의 일반항은 $2n-1$)

이 수열의 일반항 a_n은

$$\begin{aligned}a_n&=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=2+2\times\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)\\&=n^2-2n+3\end{aligned}$$

따라서 주어진 수열의 일반항은 $\frac{1}{n-\sqrt{n^2-2n+3}}$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2-2n+3}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-2n+3}}{(n-\sqrt{n^2-2n+3})(n+\sqrt{n^2-2n+3})}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-2n+3}}{n^2-(n^2-2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-2n+3}}{2n-3}\\&=\frac{1+\sqrt{1}}{2}=1\end{aligned}$$

실력 up

확인 01

본문 240 쪽

(1) 자연수 n에 대하여 $n^2<n^2+2n<n^2+2n+1$이므로

$n^2<n^2+2n<(n+1)^2$ $\therefore n<\sqrt{n^2+2n}<n+1$

따라서 $\sqrt{n^2+2n}$의 정수 부분이 n이므로

$a_n=\sqrt{n^2+2n}-n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

(2) 자연수 n에 대하여 $4n^2<4n^2+n+1<4n^2+4n+1$이므로

$(2n)^2<4n^2+n+1<(2n+1)^2$

$\therefore 2n<\sqrt{4n^2+n+1}<2n+1$

따라서 $\sqrt{4n^2+n+1}$의 정수 부분이 $2n$이므로

$a_n=\sqrt{4n^2+n+1}-2n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n+1}-2n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+n+1}-2n)(\sqrt{4n^2+n+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+n+1}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+1-4n^2}{\sqrt{4n^2+n+1}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{4n^2+n+1}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}$$

$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

05-1 Action 수열의 극한값이 0이 아닌 값으로 수렴하려면 (분모의 차수)=(분자의 차수)이어야 한다.

수열 $\left\{\frac{an^3+bn^2+3n-1}{3n^2-2n+1}\right\}$의 극한값이 0이 아닌 값 3으로 수렴하므로

(i) 분모와 분자의 차수가 같다. $\therefore a=0$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2+3n-1}{3n^2-2n+1}=3$에서

$\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}=\frac{b}{3}=3$ $\therefore b=9$

(i), (ii)로부터 $a+b=9$

LECTURE

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+3n-1}{3n^2-2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\begin{cases}\infty & (a>0)\\ \frac{b}{3} & (a=0)\\ -\infty & (a<0)\end{cases}$$

05-2 Action $\sqrt{n^2+an}-n$에서 분모를 1로 생각하여 분모, 분자에 $\sqrt{n^2+an}+n$을 곱한다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-n)(\sqrt{n^2+an}+n)}{\sqrt{n^2+an}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+an-n^2}{\sqrt{n^2+an}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{n^2+an}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}=\frac{a}{1+1}=\frac{a}{2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)=2$이므로 $\frac{a}{2}=2$ $\therefore a=4$

06-1 Action $\frac{2a_n-3}{a_n+1}$을 x_n으로 놓고 a_n에 대한 식으로 정리한다.

$\frac{2a_n-3}{a_n+1}=x_n$으로 놓으면

$2a_n-3=x_n(a_n+1)$, $2a_n-3=a_nx_n+x_n$

$a_n(2-x_n)=x_n+3$ $\therefore a_n=\frac{x_n+3}{2-x_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{4}$, 즉 수열 $\{x_n\}$은 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+3}{2-x_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}(x_n+3)}{\lim_{n\to\infty}(2-x_n)}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}3}{\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}x_n}=\frac{\frac{3}{4}+3}{2-\frac{3}{4}}=3$$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_n+1}=\frac{\lim_{n\to\infty}(2a_n-3)}{\lim_{n\to\infty}(a_n+1)}=\frac{2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}3}{\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}1}$$

$$=\frac{2\alpha-3}{\alpha+1}=\frac{3}{4}$$

즉 $4(2\alpha-3)=3(\alpha+1)$, $8\alpha-12=3\alpha+3$ $\therefore \alpha=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=3$

06-2 Action a_n-b_n을 x_n으로 놓고 b_n에 대한 식으로 정리한다.

$a_n-b_n=x_n$으로 놓으면 $b_n=a_n-x_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이고, $\lim_{n\to\infty}x_n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-2}{2a_n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-x_n-2}{2a_n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{x_n}{a_n}-\frac{2}{a_n}}{2+\frac{2}{a_n}}$$

$$=\frac{1-0-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

셀파특강 ○, × 문제 풀이 본문 243 쪽

1 $a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=c_n-a_n$

수열 $\{a_n\}$, $\{c_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}c_n=\gamma$라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}c_n-\lim_{n\to\infty}a_n=\gamma-\alpha$(수렴)

따라서 수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다. (○)

2 $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_n-c_n$

수열 $\{a_n\}$, $\{c_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}c_n=\gamma$라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha-\gamma$(수렴)

따라서 수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{a_n-b_n\}$이 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다. (○)

3 [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$이면 $a_n+b_n=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$, 즉 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 발산한다. (×)

4 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot a_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha^2$(수렴)

따라서 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n^2\}$도 수렴한다. (○)

5 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$(수렴)

따라서 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{a_nb_n\}$도 수렴한다. (○)

6 [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^n$이면 $a_nb_n=1$

따라서 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 발산하지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$이므로 수열 $\{a_nb_n\}$은 수렴한다. (×)

7 [반례] $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{n}$이면 $a_nb_n=1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이지만

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다. (×)

셀파특강 확인 02 본문 243 쪽

(1) [반례] $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{n}$이면 $a_nb_n=1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}1=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n\neq0$이다. (×)

(2) [반례] $a_n=n$, $b_n=n^2$이면 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{n}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\neq1$이다. (×)

(3) [반례] $a_n=n+1$, $b_n=n$이면 $a_n-b_n=1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\neq0$이다. (×)

참고

$\frac{\infty}{\infty}=1$, $\infty-\infty=0$은 일반적으로 성립하지 않는다.

개념 강화 드릴 ②

본문 245 쪽

01 (1) n이 자연수이므로 $1-\frac{1}{n}<1+\frac{1}{n}<2+\frac{1}{n}$

$\therefore a_n<b_n<c_n$

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1-0=1$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1+0=1$

$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2+0=2$

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n<\lim_{n\to\infty}c_n$

02 모든 자연수 n에 대하여

$-1\le\sin n\theta\le1$이므로 $-\frac{1}{n}\le\frac{\sin n\theta}{n}\le\frac{1}{n}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$이고,

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로

$0\le\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}\le0$ $\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=0$

03 (1) 수열 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots$의 공비는 $-\frac{1}{2}$이고,

$-1<-\frac{1}{2}<1$이므로 주어진 무한등비수열은 수렴한다.

(2) 수열 $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \cdots$의 공비는 $\sqrt{3}$이고, $\sqrt{3}>1$이므로 주어진 무한등비수열은 발산한다.

04

a_n	공비	공비의 범위	$\lim_{n\to\infty} a_n$	수렴, 발산 판단
$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\frac{1}{3}$	$-1<\frac{1}{3}<1$	0	수렴
3^n	3	$3>1$	∞	발산
$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$	$\frac{1}{4}$	$-1<\frac{1}{4}<1$	0	수렴
$(-2)^n$	-2	$-2<-1$		발산
$\left(-\frac{6}{7}\right)^{n-1}$	$-\frac{6}{7}$	$-1<-\frac{6}{7}<1$	0	수렴

05 (1) 무한등비수열 $1, -3r, 9r^2, -27r^3, \cdots$에서 공비가 $-3r$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<-3r\le 1 \quad \therefore -\frac{1}{3}\le r<\frac{1}{3}$

주의

$-1<-3r\le 1$의 각변을 -3으로 나누면 부등호의 방향이 반대로 바뀌므로 $\frac{-1}{-3}>r\ge\frac{1}{-3}$, 즉 $-\frac{1}{3}\le r<\frac{1}{3}$이다.

이를 $-\frac{1}{3}<r\le\frac{1}{3}$로 답하지 않도록 주의하자.

(2) 무한등비수열 $1, \frac{r}{2}, \frac{r^2}{4}, \frac{r^3}{8}, \cdots$에서 공비가 $\frac{r}{2}$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\frac{r}{2}\le 1 \quad \therefore -2<r\le 2$

06 (1) 수열 $\{(x+1)^n\}$에서 공비가 $x+1$이므로 이 수열이 수렴하려면 $-1<x+1\le 1$이어야 한다.

따라서 구하는 x값의 범위는

$-2<x\le 0$

(2) 수열 $\{(2x-1)^{n-1}\}$에서 공비가 $2x-1$이므로 이 수열이 수렴하려면 $-1<2x-1\le 1$이어야 한다.

따라서 구하는 x값의 범위는

$0<2x\le 2$에서 $0<x\le 1$

셀파 특강 **확인 03** 본문 246 쪽

(1) $-1\le\cos\frac{n\theta}{2}\le 1$이므로 $-\frac{1}{n}\le\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{2}\le\frac{1}{n}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{2}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$이고,

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로

$0\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{2}\le 0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{2}=0$

(2) $-1\le\sin\frac{n\theta}{3}\le 1$이므로 $-\frac{1}{n}\le\frac{1}{n}\sin\frac{n\theta}{3}\le\frac{1}{n}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\theta}{3}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$이고,

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로

$0\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\theta}{3}\le 0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\theta}{3}=0$

확인 문제 본문 247~251 쪽

07-1 Action 부등식의 각 변의 극한값을 구한다.

$\frac{2n^2-n}{n^2+3}<a_n<\frac{2n^2+n}{n^2+3}$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2+3}\le\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+3}$이고,

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2+3}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+3}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

07-2 Action $\lim_{n\to\infty}\frac{4n+a_n}{4n-a_n}$의 분모와 분자를 n으로 나눈다.

$2n<a_n<2n+1$에서 각 변을 n으로 나누면

$\frac{2n}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{2n+1}{n}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}$이고,

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4n+a_n}{4n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{a_n}{n}}{4-\frac{a_n}{n}}=\frac{4+2}{4-2}=3$

8-1 Action 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 나누거나 묶는다.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^{n+2}}{2^n+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times(-3)^n}{2^n+3\times3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9(-1)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}$

즉 진동하므로 극한값은 없다.

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}-3^{n+2}}{3^{n+1}-4^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-9\times3^n}{3\times3^n-16\times4^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-9\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3\left(\frac{3}{4}\right)^n-16}=-\frac{1}{16}$

(3) $\lim_{n\to\infty}(2^{2n}-3^n)=\lim_{n\to\infty}(4^n-3^n)$

$=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=\infty$

8-2 Action $|\alpha|>|\beta|$인 경우와 $|\alpha|<|\beta|$인 경우로 나눈다.

(i) $|\alpha|>|\beta|$일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\cdot\alpha^n+\beta\cdot\beta^n}{\alpha^n+\beta^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}=\frac{\alpha}{1}=\alpha$

(ii) $|\alpha|<|\beta|$일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\cdot\alpha^n+\beta\cdot\beta^n}{\alpha^n+\beta^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+\beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+1}=\frac{\beta}{1}=\beta$

(i), (ii)로부터 구하는 극한값은 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근 중 절댓값이 큰 값이다. 이때 $x^2-2x-4=0$의 두 근은 $x=1\pm\sqrt{5}$이므로 구하는 극한값은 $\mathbf{1+\sqrt{5}}$

9-1 Action 무한등비수열의 첫째항과 공비를 찾는다.

(1) 수열 $\{(x-3)(x+2)^{n-1}\}$은 첫째항이 $x-3$이고 공비가 $x+2$인 등비수열이므로 이 무한등비수열이 수렴하려면

$x-3=0$ 또는 $-1<x+2\le1$

(i) $x-3=0$에서 $x=3$

(ii) $-1<x+2\le1$에서 $-3<x\le-1$

(i), (ii)로부터 구하는 x값의 범위는

$\boldsymbol{x=3}$ 또는 $\boldsymbol{-3<x\le-1}$

(2) 수열 $\left\{(x+1)\left(\frac{x-2}{3}\right)^{n-1}\right\}$은

첫째항이 $x+1$이고, 공비가 $\frac{x-2}{3}$인 등비수열이므로

이 무한등비수열이 수렴하려면

$x+1=0$ 또는 $-1<\frac{x-2}{3}\le1$

(i) $x+1=0$에서 $x=-1$

(ii) $-1<\frac{x-2}{3}\le1$에서 $-3<x-2\le3$

$\therefore -1<x\le5$

(i), (ii)로부터 구하는 x값의 범위는 $\mathbf{-1\le x\le5}$

9-2 Action 무한등비수열이 0으로 수렴하려면 $-1<$(공비)<1이어야 한다.

수열 $\{(-2+\log x)^n\}$은 첫째항과 공비가 모두 $-2+\log x$인 등비수열이고 이 무한등비수열이 0으로 수렴하려면

$-1<-2+\log x<1,\ 1<\log x<3$

$\log10<\log x<\log10^3$

$\therefore 10<x<1000$

이때 정수 x의 개수는 **989**(개)이다.

개념 다시보기 로그부등식의 풀이

양변의 밑을 같게 할 수 있는 경우 진수끼리 비교하여 푼다. 이때 로그의 밑과 진수의 조건 및 부등호의 방향에 주의한다.

(i) $a>1$일 때

$\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff 0<f(x)<g(x)$

(ii) $0<a<1$일 때

$\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff f(x)>g(x)>0$

10-1 Action r값의 범위를 $0<r<1$, $r=1$, $r>1$로 나누어 구한다.

(i) $\mathbf{0<r<1}$일 때

$\lim_{n\to\infty}r^n=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4r^n-3}{2r^n+1}=\frac{0-3}{0+1}=\mathbf{-3}$

(ii) $\boldsymbol{r=1}$일 때

$\lim_{n\to\infty}r^n=1 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4r^n-3}{2r^n+1}=\frac{4-3}{2+1}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

(iii) $\boldsymbol{r>1}$일 때

$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4r^n-3}{2r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{r^n}}{2+\frac{1}{r^n}}=\frac{4-0}{2+0}=\mathbf{2}$

10-2 Action r값의 범위를 $|r|>1$, $|r|<1$, $r=1$, $r=-1$로 나누어 구한다.

(i) $|r|>1$일 때

$\left|\frac{1}{r}\right|<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{r^n-2}{1+r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-\frac{2}{r^{2n}}}{\frac{1}{r^{2n}}+1}=\frac{0-0}{0+1}=0$$

(ii) $|r|<1$일 때

$\lim_{n\to\infty} r^n=0$, $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{r^n-2}{1+r^{2n}}=\frac{0-2}{1+0}=-2$$

(iii) $r=1$일 때

$\lim_{n\to\infty} r^n=1$, $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{r^n-2}{1+r^{2n}}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

(iv) $r=-1$일 때

수열 $\{r^n\}$이 진동하므로 극한값이 존재하지 않는다.

11-1 Action 삼각형 OP_nQ_n의 넓이를 n에 대한 식으로 나타낸다.

주어진 원의 반지름의 길이가 $2n$이고 $\overline{P_nQ_n}$의 중점을 R_n이라고 하면

$\triangle OR_nP_n$에서 $\overline{OP_n}=2n$, $\overline{OR_n}=n$이므로

$\overline{P_nR_n}=\sqrt{(2n)^2-n^2}=\sqrt{3}n$

$\therefore \overline{P_nQ_n}=2\times\sqrt{3}n=2\sqrt{3}n$

이때 $\triangle OP_nQ_n=\frac{1}{2}\times n\times 2\sqrt{3}n=\sqrt{3}n^2$이므로

$\triangle OP_{n+1}Q_{n+1}=\sqrt{3}(n+1)^2$

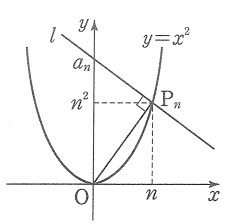
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\triangle OP_{n+1}Q_{n+1}}{\triangle OP_nQ_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}(n+1)^2}{\sqrt{3}n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}=1$$

11-2 Action 점 P_n을 지나고 직선 OP_n에 수직인 직선의 방정식을 구한다.

직선 OP_n의 기울기는 $\frac{n^2-0}{n-0}=n$이고 직선 l의 기울기는 선분 OP_n에 수직이므로 $-\frac{1}{n}$이다. 이때 직선 l은 점 $P_n(n, n^2)$을 지나는 직선이므로 직선 l의 방정식은

$y-n^2=-\frac{1}{n}(x-n)$ …… ㉠



이때 a_n은 직선 l의 y절편이므로 $(0, a_n)$을 ㉠에 대입하면

$a_n-n^2=-\frac{1}{n}(0-n)$, $a_n-n^2=1$

$\therefore a_n=n^2+1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2}=1$$

셀파 특강 **확인 04** 본문 252 쪽

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+12$에서 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}a_n+12\right)$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} 12$

이때 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$라 하면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$에서

$\alpha=\frac{1}{3}\alpha+12$, $\frac{2}{3}\alpha=12$ $\therefore \alpha=18$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=18$

다른 풀이

$a_{n+1}-k=\frac{1}{3}(a_n-k)$라고 하면 $k-\frac{1}{3}k=12$에서 $k=18$

즉 $a_{n+1}-18=\frac{1}{3}(a_n-18)$에서 수열 $\{a_n-18\}$은 첫째항이 $3-18=-15$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n-18=-15\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

따라서 $a_n=-15\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+18$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-15\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+18\right\}=18$$

LECTURE $a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴의 점화식을 이용한 극한값

$a_{n+1}=pa_n+q(p\neq 1)$ 꼴의 점화식을 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$로 변형하면 p는 수열 $\{a_n-\alpha\}$의 공비가 된다.

따라서 수열 $\{a_n-\alpha\}$는 $|p|<1$일 때 수렴하고, 수열 $\{a_n\}$도 $|p|<1$일 때 수렴하게 된다.

$|p|<1$일 때 수열 $\{a_n-\alpha\}$는 첫째항이 $a_1-\alpha$, 공비가 p인 등비수열이므로

$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$

이 식의 양변에 $\lim_{n\to\infty}$를 취하면

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-\alpha)=\lim_{n\to\infty}(a_1-\alpha)p^{n-1}=0$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$

이와 같은 원리로 **확인 04** 다른 풀이 의 풀이 과정 중

$a_{n+1}-18=\frac{1}{3}(a_n-18)$

에서 $\lim_{n\to\infty} a_n=18$을 바로 구할 수 있다.

기본강화 본문 253~255쪽

01 Action 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$x^2+nx-n^2+1=0$의 두 근이 a_n, b_n이므로 근과 계수의 관계로부터

$a_n+b_n=-n$, $a_nb_n=-n^2+1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}+\frac{a_n}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{a_nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n}{a_nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(-n)^2-2(-n^2+1)}{-n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2}{-n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n^2}}{-1+\frac{1}{n^2}}=\frac{3-0}{-1+0}=-3$$

02 Action $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$을 이용한다.

$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$이므로 $S_n=n^2+2n$에서

$a_n=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=(n^2+2n)-(n^2-1)=2n+1$

이때 $a_{n+1}=2(n+1)+1=2n+3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_na_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{4n^2+8n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{4+\frac{8}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{1+0}{4+0+0}=\frac{1}{4}$$

참고

첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 이용하여 일반항 a_n을 구할 때 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$, $a_1=S_1$과 같이 $n\geq 2$일 때와 $n=1$일 때를 나누어 구했다. 하지만 극한값을 구할 때는 $n\to\infty$인 경우의 값을 구하는 것이므로 $n\geq 2$일 때와 $n=1$일 때를 나누어 a_n을 구할 필요가 없다.

03 Action 수열의 합을 n에 대한 식으로 나타낸다.

(분자)$=1+7+13+\cdots+(6n-5)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(6k-5)=6\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}5$$

$$=6\times\frac{n(n+1)}{2}-5n=3n^2-2n$$

(분모)$=1+4+7+\cdots+(3n-2)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(3k-2)=3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2$$

$$=3\times\frac{n(n+1)}{2}-2n=\frac{3}{2}n^2-\frac{n}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n}{\frac{3}{2}n^2-\frac{n}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}}=\frac{3-0}{\frac{3}{2}-0}=2$$

다른 풀이

등차수열의 합 공식을 이용하여 분자, 분모를 n에 대한 다항식으로 정리하면

(분자)$=\frac{n\{1+(6n-5)\}}{2}=\frac{6n^2-4n}{2}$

(분모)$=\frac{n\{1+(3n-2)\}}{2}=\frac{3n^2-n}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-4n}{3n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{4}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{6}{3}=2$$

개념 다시보기 Σ의 성질

❶ $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$ (복부호동순)

❷ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

❸ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

평가원 기출

04 Action 주어진 식의 분모 또는 분자를 유리화한다.

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{(n^2+2n)-(n^2-2n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{4n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{2}$$

$$=\frac{1+1}{2}=1$$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+15n+13}-\sqrt{n^2-13n})$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+15n+13}-\sqrt{n^2-13n})(\sqrt{n^2+15n+13}+\sqrt{n^2-13n})}{\sqrt{n^2+15n+13}+\sqrt{n^2-13n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+15n+13)-(n^2-13n)}{\sqrt{n^2+15n+13}+\sqrt{n^2-13n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{28n+13}{\sqrt{n^2+15n+13}+\sqrt{n^2-13n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{28+\frac{13}{n}}{\sqrt{1+\frac{15}{n}+\frac{13}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{13}{n}}}=\dfrac{28}{1+1}=14$

평가원 기출

05 Action 주어진 식의 분모를 유리화한다.

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+kn}-n+k}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+kn}+(n-k)}{\{\sqrt{n^2+kn}-(n-k)\}\{\sqrt{n^2+kn}+(n-k)\}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+kn}+n-k}{(n^2+kn)-(n^2-2kn+k^2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+kn}+n-k}{3kn-k^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{k}{n}}+1-\frac{k}{n}}{3k-\frac{k^2}{n}}=\dfrac{2}{3k}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+kn}-n+k}=\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{2}{3k}=\dfrac{1}{3}$ $\therefore k=2$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{n(n+1-n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{k+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{k}(1+1)}{2}=\sqrt{k}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}=5$이므로

$\sqrt{k}=5$ $\therefore k=25$

06 Action 주어진 수의 근호 안의 수와 적당한 완전제곱수의 대소 관계를 이용한다.

자연수 n에 대하여 $4n^2<4n^2+3<4n^2+4n+1$이므로

$(2n)^2<4n^2+3<(2n+1)^2$

$\therefore 2n<\sqrt{4n^2+3}<2n+1$

따라서 $\sqrt{4n^2+3}$의 정수 부분 $a_n=2n$이므로

소수 부분 $b_n=\sqrt{4n^2+3}-2n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}2n(\sqrt{4n^2+3}-2n)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n(\sqrt{4n^2+3}-2n)(\sqrt{4n^2+3}+2n)}{\sqrt{4n^2+3}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n(4n^2+3-4n^2)}{\sqrt{4n^2+3}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{6n}{\sqrt{4n^2+3}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{6}{\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}+2}$

$=\dfrac{6}{2+2}=\dfrac{3}{2}$

교육청 기출

07 Action 무한수열의 극한값의 기본 성질을 이용한다.

ㄱ. [반례] $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=n+1$이라고 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$이지만

수열 $\{b_n\}$은 발산한다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-2b_n)+2b_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)+2\lim_{n\to\infty}b_n$

$=0+2=2$ (참)

ㄷ. [반례] $a_n=n-\dfrac{1}{n}$, $b_n=n$, $c_n=n+\dfrac{1}{n}$이라고 하면

$a_n<b_n<c_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$이지만

수열 $\{b_n\}$은 발산한다. (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

LECTURE 참이라고 착각하기 쉬운 명제

❶ 수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 중 적어도 하나는 수렴한다. (×)

[반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$일 때

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n+1}=-1$ ⇨ 수렴

그런데 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ ⇨ 발산(진동)

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ ⇨ 발산(진동)

❷ $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$이다. (×)

[반례] $a_n=n^2$, $b_n=\frac{1}{n}$일 때

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} n^2=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}=0$

그런데 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left(n^2\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n=\infty$

❸ $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=1$이다. (×)

[반례] $a_n=2n$, $b_n=n$일 때

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} 2n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} n=\infty$

그런데 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n}=2$

❹ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다. (×)

[반례] $a_n=1-(-1)^n$, $b_n=1+(-1)^n$일 때

a_n : 2, 0, 2, 0, 2, 0, … ⇨ 발산(진동)

b_n : 0, 2, 0, 2, 0, 2 … ⇨ 발산(진동)

a_nb_n : 0, 0, 0, 0, 0, 0 … ⇨ 수렴

즉 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$이지만 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 발산한다.

08 Action $(n+1)a_n$을 b_n으로 치환한다.

$(n+1)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{n+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=3$, 즉 수열 $\{b_n\}$은 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=\lim_{n\to\infty}(2n-1)\cdot\frac{b_n}{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}\lim_{n\to\infty} b_n=2\times3=\mathbf{6}$$

다른 풀이

$$\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(n+1)a_n\cdot\frac{2n-1}{n+1}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=3\times2=6$$

09 Action (분모의 차수)=(분자의 차수)이면 극한값은 최고차항의 계수의 비임을 이용한다.

$\frac{2n^2-1}{n^2+3}<a_n<\frac{2n^2}{n^2+1}$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+3}\le\lim_{n\to\infty} a_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+3}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\mathbf{2}$

10 Action 부등식의 각 변을 $3^{n-1}+2^n$으로 나눈다.

$3^n-2^n<(3^{n-1}+2^n)a_n<3^n+2^n$에서

$$\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}<a_n<\frac{3^n+2^n}{3^{n-1}+2^n}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}\le\lim_{n\to\infty} a_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{3^{n-1}+2^n}$이고,

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1+2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}=\frac{3-0}{1+0}=3$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{3^{n-1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1+2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}=\frac{3+0}{1+0}=3$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=3$

11 Action 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항을 구한다.

$a_n+b_n=3^{n+1}$ …… ㉠, $a_n-b_n=2^n$ …… ㉡이라 하면

㉠+㉡에서 $2a_n=3^{n+1}+2^n$ $\quad\therefore a_n=\frac{3^{n+1}+2^n}{2}$

㉠−㉡에서 $2b_n=3^{n+1}-2^n$ $\quad\therefore b_n=\frac{3^{n+1}-2^n}{2}$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}+2^n}{2}}{\frac{3^{n+1}-2^n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^n}{3^{n+1}-2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{3+0}{3-0}=\frac{3}{3}=1$$

교육청 기출

12 Action A^2, A^3, …의 규칙성을 통하여 A^n을 추정한다.

$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&0\\0&3^2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}2^2&0\\0&3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&0\\0&3^3\end{pmatrix}$

……

즉 $A^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$이므로 $a_n=2^n$, $b_n=3^n$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2b_n}{2a_n+3b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot2^n-2\cdot3^n}{2\cdot2^n+3\cdot3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\frac{2}{3}\right)^n-2}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}=\frac{0-2}{0+3}=-\frac{2}{3}$$

평가원 기출

13 Action $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$을 이용한다.

$S_n=2^n+3^n$에서 $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$이므로

$a_n=(2^n+3^n)-(2^{n-1}+3^{n-1})$

$=2^{n-1}(2-1)+3^{n-1}(3-1)=2^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}}{2^n+3^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=\dfrac{0+\frac{2}{3}}{0+1}=\boxed{\dfrac{2}{3}}$

14 Action $a^n\times b^n$의 양의 약수의 총합 $f(n)$은 $f(n)=(1+a+a^2+\cdots+a^n)(1+b+b^2+\cdots+b^n)$

$6^n=2^n\times 3^n$이므로 6^n의 양의 약수의 총합 $f(n)$은

$f(n)=(1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+3+3^2+\cdots+3^n)$

$=\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}\times\dfrac{3^{n+1}-1}{3-1}$

$=\dfrac{1}{2}(2^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{6^n}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)}{6^n}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^{n+1}-2^{n+1}-3^{n+1}+1}{6^n}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left\{6-2\left(\frac{1}{3}\right)^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\times 6=3$

개념 다시보기 양의 약수의 개수와 총합

자연수 $N=a^pb^qc^r$ (a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수)에 대하여

❶ N의 양의 약수의 개수

$(p+1)(q+1)(r+1)$

❷ N의 양의 약수의 총합

$(1+a+\cdots+a^p)\times(1+b+\cdots+b^q)\times(1+c+\cdots+c^r)$

15 Action 무한등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하려면 $-1<r\leq 1$이어야 한다.

무한등비수열 $\left\{\dfrac{(3x+1)^n}{2^n}\right\}$, 즉 $\left\{\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$-1<\dfrac{3x+1}{2}\leq 1$, $-2<3x+1\leq 2$

$-3<3x\leq 1$ $\therefore \boxed{-1<x\leq\dfrac{1}{3}}$

16 Action $|r|<1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$, $r=1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$, $r>1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$를 이용한다.

(i) $|r|<1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$

따라서 a의 값은 1

(ii) $r=1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

따라서 b의 값은 0

(iii) $r>1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$

따라서 c의 값은 -1

(i), (ii), (iii)으로부터 $a+b+c=1+0+(-1)=\boxed{0}$

17 Action 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$을 이용한다.

$\overline{OP_n}=\sqrt{n^2+(\sqrt{n})^2}=\sqrt{n^2+n}$, $\overline{OQ_n}=n$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(\overline{OP_n}-\overline{OQ_n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{1+1}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

18 Action (직선 OB_n의 기울기)$=a_n$

$\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_2B_2}=\dfrac{1}{2}$, $\overline{A_3B_3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, $\cdots$

즉 $\overline{A_nB_n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_n=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$이고,

이때 $1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \frac{2}{2} = 1$$

19 Action $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$를 이용한다.

$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + b$에서 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}a_n + b\right)$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b$

이때 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 6$이다.

따라서 $6 = \frac{2}{3}\times 6 + b$이므로 $6 = 4 + b$ $\therefore b = 2$

다른 풀이

$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + b$에서 $a_{n+1} - \alpha = \frac{2}{3}(a_n - \alpha)$라 하면

$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n - \frac{2}{3}\alpha + \alpha$ $\therefore a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}\alpha$

따라서 $\frac{1}{3}\alpha = b$이므로 $\alpha = 3b$

즉 $a_{n+1} - 3b = \frac{2}{3}(a_n - 3b)$에서 수열 $\{a_n - 3b\}$는 첫째항이

$a_1 - 3b = a - 3b$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$a_n - 3b = (a-3b)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $a_n = 3b + (a-3b)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{3b + (a-3b)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$
$= 3b + 0 = 3b$

그런데 $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$이므로 $3b = 6$에서 $b = 2$

교육청 기출

20 Action $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$를 이용한다.

$a_0 = 2300$이고, $a_{n+1} = a_n \times 0.88 + x$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라고 하면

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(a_n \times 0.88 + x)$에서

$\alpha = 0.88\alpha + x$, $0.12\alpha = x$ $\therefore \alpha = \frac{x}{0.12}$

이때 $2000 \le \alpha \le 2500$이므로

$2000 \le \frac{x}{0.12} \le 2500$ $\therefore 240 \le x \le 300$

따라서 구하는 x의 최솟값은 **240**

교육청 기출

21 Action $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$를 이용한다.

원 O_{n+1}의 넓이는 원 O_n의 사분원의 넓이보다 12π 더 넓으므로

$S_{n+1} = \frac{1}{4}S_n + 12\pi$에서

$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}S_n + 12\pi\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} S_n + 12\pi$

이때 수열 $\{S_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$라 하면 $\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \alpha$이다.

따라서 $\alpha = \frac{1}{4}\alpha + 12\pi$이므로 $\frac{3}{4}\alpha = 12\pi$ $\therefore \alpha = 16\pi$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \mathbf{16\pi}$

다른 풀이

원 O_1의 넓이가 20π이므로 $S_1 = 20\pi$

$S_{n+1} = \frac{1}{4}S_n + 12\pi$에서 $S_{n+1} - \alpha = \frac{1}{4}(S_n - \alpha)$라 하면

$S_{n+1} = \frac{1}{4}S_n - \frac{1}{4}\alpha + \alpha$ $\therefore S_{n+1} = \frac{1}{4}S_n + \frac{3}{4}\alpha$

따라서 $\frac{3}{4}\alpha = 12\pi$이므로 $\alpha = 16\pi$

즉 $S_{n+1} - 16\pi = \frac{1}{4}(S_n - 16\pi)$에서 수열 $\{S_n - 16\pi\}$는

첫째항이 $S_1 - 16\pi = 4\pi$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$S_n - 16\pi = 4\pi\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\pi$

$S_n = \left\{16 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right\}\pi$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{16 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right\}\pi = 16\pi$

2. 무한급수

개념 강화 드릴 ①

본문 257 쪽

01 (1) $-8-5-2+1+4+\cdots$에서
수열 $-8, -5, -2, 1, 4, \cdots$의 일반항 a_n은
$a_n=-8+(n-1)\times 3=3n-11$
$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(3n-11)=\infty$
따라서 주어진 무한급수는 발산한다.

(2) $2+2+2+2+2+\cdots$에서 수열 $2, 2, 2, 2, \cdots$의 일반항 a_n은 $a_n=2$
$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=2\neq 0$
따라서 주어진 무한급수는 발산한다.

02 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$에서 $a_n=\frac{n}{n+1}$이고
$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$
따라서 주어진 무한급수는 발산한다.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n^2+3}$에서 $a_n=\frac{3n^2+1}{n^2+3}$이고
$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2+3}=3\neq 0$
따라서 주어진 무한급수는 발산한다.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2}{3n+1}$에서 $a_n=\frac{n^2-2}{3n+1}$이고
$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2}{3n+1}=\infty$
따라서 주어진 무한급수는 발산한다.

03 (1) 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로
$S_n=\frac{n\{2\cdot 2+(n-1)\times 3\}}{2}=\boldsymbol{\frac{3n^2+n}{2}}$

(2) 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로
$S_n=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로
$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$
$=1-\frac{1}{n+1}=\boldsymbol{\frac{n}{n+1}}$

(4) $\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$이므로
$S_n=(2-1)+\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(2-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$
$=2n-\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2n-2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$
$=\boldsymbol{2n-2+\frac{1}{2^{n-1}}}$

04 (1) 무한급수 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$에서 제 n 항까지의 부분합을 S_n이라고 하면
$S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{3}{2}$
따라서 주어진 무한급수는 수렴한다.

(2) 무한급수
$\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)+\cdots$에서
제 n 항까지의 부분합을 S_n이라고 하면
$S_n=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)$
$=2-\boldsymbol{\frac{n+2}{n+1}}$
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$
따라서 주어진 무한급수는 수렴한다.

05 각 무한급수에서 제 n 항까지의 부분합을 S_n이라고 하자.
(1) 수열 $\frac{1}{5}, \left(\frac{1}{5}\right)^2, \left(\frac{1}{5}\right)^3, \left(\frac{1}{5}\right)^4, \cdots$은 첫째항이 $\frac{1}{5}$, 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열이므로
$S_n=\frac{\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}=\frac{1}{4}$
따라서 주어진 무한급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{4}$이다.

(2) 수열 $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \cdots$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{2}{3}}=3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} 3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=3$$

따라서 주어진 무한급수는 수렴하고, 그 합은 **3**이다.

(3) $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{8}{k(k+2)}$$

$$=8\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=8\times\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=4\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} 4\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=4\cdot\frac{3}{2}=6$$

따라서 주어진 무한급수는 수렴하고, 그 합은 **6**이다.

(4) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

$$=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2})$$

$$=\infty$$

따라서 주어진 무한급수는 발산한다.

확인 문제 본문 259~263 쪽

1-1 Action $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$ ⇨ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산,
$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ⇨ $\lim_{n\to\infty} S_n$을 확인한다.

(1) 무한수열 $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \cdots$의 일반항은

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\infty}=0$이므로

이 무한급수에서 S_n을 구하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\sqrt{n+1}-1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$ (발산)

(2) 무한수열 $\sqrt{1^2+1}-1, \sqrt{2^2+2}-2, \sqrt{3^2+3}-3, \cdots$의 일반항은 $a_n=\sqrt{n^2+n}-n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}\neq 0$$

따라서 이 무한급수는 발산한다.

1-2 Action $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ⇨ $\lim_{n\to\infty} S_n$을 확인한다.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$에서

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$=\frac{1}{(3n+2)-(3n-1)}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

따라서 S_n을 구하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3n+2-2}{2(3n+2)}$$

$$=\frac{n}{2(3n+2)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\lim_{n\to\infty} S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(3n+2)}=\frac{1}{6}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$에서

$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

따라서 S_n을 구하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2\times\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{2n}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$에서

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

따라서 S_n을 구하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}=1$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$에서

$$\log\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\log\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$$

$$=\log\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$$

$$=\log\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

따라서 S_n을 구하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$

$$=\log\left(\frac{1\times3}{2\times2}\times\frac{2\times4}{3\times3}\times\frac{3\times5}{4\times4}\times\cdots\times\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)$$

$$=\log\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$=\log\frac{1}{2}$$

셀파 특강 **확인 01** 본문 261 쪽

(1) +, −가 교대로 나타나므로 짝수항까지의 합과 홀수항까지의 합을 각각 구하면

$S_2=1-1=0$, $S_4=1-1+2-2=0$,

$S_6=1-1+2-2+3-3=0$, …, $S_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

$S_1=1$, $S_3=1-1+2=2$, $S_5=1-1+2-2+3=3$, …, $S_{2n-1}=n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\infty$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}$이므로 이 무한급수는 발산한다.

(2) 괄호로 묶여 있는 $1-\frac{1}{2}$을 첫째항, $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$를 둘째항, $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$을 셋째항, …으로 보면 제n항까지의 합은

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\ (\text{수렴})$$

(3) $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\times2}$, $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\times3}$, $\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\times4}$, …이므로

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}=S_n$이라 하면

$$S_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$<1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}$$

이때 모든 자연수 n에 대하여 각 항 $\frac{1}{n^2}$은 양수이므로 주어진 무한급수의 합은 계속 증가하지만 2보다 작으므로 S는 수렴한다.

교육청 기출

02-1 Action $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ⇨ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 ⇨ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$이 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \beta$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
$$= \beta - \alpha \text{ (수렴) (참)}$$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ∴ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ (참)

ㄷ. (반례) $\begin{cases}\{a_n\} : 1, 0, 1, 0, 1, \cdots \\ \{b_n\} : 0, 1, 0, 1, 0, \cdots\end{cases}$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0$이고

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이지만 $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$이다. (거짓)

ㄹ. (반례) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n = -n$이면 $a_n > b_n$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴

하지만 $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다. (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

03-1 Action 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+k)$가 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n+k)=0$이다.

주어진 무한급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}\right) = 0$$

이때 $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right\} = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

개념 다시보기 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값 구하기

분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 구한다.

❶ (분자의 차수)=(분모의 차수)
⇨ 극한값은 최고차항의 계수의 비

❷ (분자의 차수)<(분모의 차수) ⇨ 극한값은 0

❸ (분자의 차수)>(분모의 차수) ⇨ ∞ 또는 $-\infty$로 발산

03-2 Action $\lim_{n\to\infty} a_n = k$ (k는 상수)로 놓는다.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+3}{a_n^2}-2\right)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+3}{a_n^2}-2\right)=0$ ····· ㉠

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n = k$ (k는 상수)로 놓으면 ㉠에서

$$\frac{\lim_{n\to\infty}(a_n+3)}{\lim_{n\to\infty} a_n^2} - \lim_{n\to\infty} 2 = 0$$

즉 $\frac{k+3}{k^2}-2=0$이므로

$2k^2-k-3=0$, $(k+1)(2k-3)=0$

∴ $k=-1$ 또는 $k=\frac{3}{2}$

그런데 수열 $\{a_n\}$의 각 항이 양수이므로 $k=\frac{3}{2}$

∴ $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$

개념 강화 드릴 ❷

본문 265쪽

01 (1) $\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5\sqrt{5}}{8}+\frac{25}{16}+\cdots$는 첫째항이 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 공비가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$인 무한등비급수이다. 이때 $\left|\frac{\sqrt{5}}{2}\right|>1$이므로 주어진 무한등비급수는 발산한다.

(2) $\log_2 2+\log_2\sqrt{2}+\log_2\sqrt[4]{2}+\log_2\sqrt[8]{2}+\cdots$에서

$\log_2 2=1$, $\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$, $\log_2\sqrt[4]{2}=\log_2 2^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$, $\log_2\sqrt[8]{2}=\log_2 2^{\frac{1}{8}}=\frac{1}{8}$이므로 주어진 무한등비급수는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 무한등비급수이다. 이때 $\left|\frac{1}{2}\right|<1$이므로 주어진 무한등비급수는 수렴하고, 그 합을 S라 하면

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 3 = 3+3+3+\cdots$은 첫째항이 3, 공비가 1인 무한등비급수이다. 따라서 주어진 무한등비급수는 발산한다.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-1)^n$은 첫째항이 $\sqrt{2}-1$, 공비가 $\sqrt{2}-1$인 무한등비급수이다. 이때 $|\sqrt{2}-1|<1$이므로 주어진 무한등비급수는 수렴하고, 그 합을 S라 하면

$$S = \frac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

02 무한등비급수 $x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots$은

(i) 첫째항이 x이므로 주어진 무한등비급수가 수렴하려면

$x=0$

(ii) 공비가 $x+1$이므로 주어진 무한등비급수가 수렴하려면

$-1<x+1<1 \quad \therefore -2<x<0$

(i), (ii)로부터 구하는 x값의 범위는 $-2<x\leq 0$

03 (1) 무한등비급수 $1+2x+4x^2+8x^3+\cdots$은 첫째항이 1이고 공비가 $2x$이므로 수렴하려면

$-1<2x<1 \quad \therefore -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

(2) 무한등비급수 $1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}-\frac{x^3}{27}+\cdots$은 첫째항이 1이고 공비가 $-\frac{x}{3}$이므로 수렴하려면

$-1<-\frac{x}{3}<1 \quad \therefore -3<x<3$

(3) 무한등비급수 $x+x(x-2)+x(x-2)^2+x(x-2)^3+\cdots$은 첫째항이 x이고 공비가 $x-2$이므로 수렴하려면

$x=0$ 또는 $-1<x-2<1$

$\therefore x=0$ 또는 $1<x<3$

04 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-2$이므로

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}2b_n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=3+2\times(-2)=-1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}3a_n-\sum_{n=1}^{\infty}2b_n$

$=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=3\times3-2\times(-2)=13$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}$

$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=\frac{1}{4}\times3+\frac{1}{2}\times(-2)=-\frac{1}{4}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{3}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=\frac{1}{2}\times3-\frac{1}{3}\times(-2)=\frac{13}{6}$

05 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=3$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=3\times3=9$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n=\frac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{5}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n=2\times\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{2}{5}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{6}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{3}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-3)^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{4}{6}\right)^n+\left(-\frac{3}{6}\right)^n\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{6}\right)^n$

$=2+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$

06 (1) $0.\dot{1}\dot{2}=0.12+0.0012+0.000012+\cdots$

$=\frac{0.12}{1-0.01}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$

(2) $0.4\dot{9}=0.4+0.09+0.009+\cdots$

$=0.4+\frac{0.09}{1-0.1}=\frac{4}{10}+\frac{9}{90}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$

(3) $0.13\dot{6}=0.13+0.006+0.0006+\cdots$

$=0.13+\frac{0.006}{1-0.1}=\frac{13}{100}+\frac{6}{900}$

$=\frac{123}{900}=\frac{41}{300}$

(4) $2.3\dot{4}\dot{5}=2.3+0.045+0.00045+\cdots$

$=2.3+\frac{0.045}{1-0.01}=\frac{23}{10}+\frac{45}{990}$

$=\frac{2322}{990}=\frac{129}{55}$

확인 문제 본문 266~273쪽

4-1 Action 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$의 수렴 조건은 $-1<r<1$이다.

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-x+1)^n$의 공비가 x^2-x+1이므로

주어진 무한등비급수가 수렴하려면 $-1<x^2-x+1<1$

(i) $-1<x^2-x+1$일 때

$x^2-x+2>0$에서 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $x^2-x+1<1$일 때

$x^2-x<0$에서 $x(x-1)<0$ $\therefore 0<x<1$

(i), (ii)로부터 구하는 x값의 범위는 $\mathbf{0<x<1}$

4-2 Action 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$의 수렴 조건은 $-1<r<1$이다.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1}$은 첫째항이 1이고, 공비가 $\frac{x+1}{2}$이므로

이 무한등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{x+1}{2}<1$, $-2<x+1<2$

$\therefore -3<x<1$

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty}(\log x)^{n-1}$은 첫째항이 $\log x$이고, 공비가 $\log x$이므로

이 무한등비급수가 수렴하려면

$-1<\log x<1$, $\log 10^{-1}<\log x<\log 10$

$\therefore \frac{1}{10}<x<10$

(i), (ii)로부터 구하는 x값의 범위는 $\mathbf{\frac{1}{10}<x<1}$

5-1 Action $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (복부호동순)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2\cdot 2^n}-\frac{2}{\frac{1}{3}\cdot 3^n}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}6\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-6\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$

$=\frac{3}{2}-3=\mathbf{-\frac{3}{2}}$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}(2^{2n-1}+3)\left(\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=2}^{\infty}2^{2n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\sum_{n=2}^{\infty}3\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot 4^n\left(\frac{1}{5}\right)^n+\sum_{n=2}^{\infty}3\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n+3\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{16}{25}}{1-\frac{4}{5}}+3\cdot\frac{\frac{1}{25}}{1-\frac{1}{5}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5}+3\cdot\frac{1}{20}$

$=\frac{8}{5}+\frac{3}{20}=\mathbf{\frac{7}{4}}$

주의

무한등비급수 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$은 $\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{5}\right)^4+\cdots$으로 첫째항이 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$, 즉 $\frac{16}{25}$이다. 마찬가지로 무한등비급수 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$의 첫째항은 $\left(\frac{1}{5}\right)^2$, 즉 $\frac{1}{25}$이다.

5-2 Action 첫째항이 a, 공비가 $r(-1<r<1)$인 무한등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=1$에서 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 첫째항이 a, 공비가 r이므로 $\frac{a}{1-r}=1$ $\therefore a=1-r$ ····· ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^3=3$에서 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^3$은 첫째항이 a^3, 공비가 r^3이므로 $\frac{a^3}{1-r^3}=3$ $\therefore a^3=3(1-r^3)$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(1-r)^3=3(1-r^3)$, $1-3r+3r^2-r^3=3-3r^3$

$2r^3+3r^2-3r-2=0$, $(r-1)(r+2)(2r+1)=0$

$\therefore r=-2$ 또는 $r=-\frac{1}{2}$ 또는 $r=1$

그런데 주어진 무한등비급수가 수렴하려면 $-1<r<1$이어야 하므로 $\mathbf{r=-\frac{1}{2}}$

이 값을 ㉠에 대입하면

$\mathbf{a=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}}$

참고

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a, 공비가 r일 때, 수열 $\{a_n{}^3\}$은 첫째항이 a^3, 공비가 r^3인 등비수열이다.

6-1 Action $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입한 후, 각 항을 '+'로 연결하여 나타낸다.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{2}$

$=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos\pi+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cos\frac{3}{2}\pi+\cdots$

$=\frac{1}{2}\cdot 0+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 0+\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 1+\cdots$

$=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots=\frac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{5}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)$

$=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\sin\frac{3}{2}\pi+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\sin\frac{5}{2}\pi+\cdots$

$=-\frac{1}{2}\cdot 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot 1+\cdots$

$=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\cdots$

$=-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=-1$

6-2 Action 첫째항이 a, 공비가 $r(-1<r<1)$인 무한등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

$1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots$는 첫째항이 1, 공비가 $\cos^2 x$인 무한등비급수이므로 그 합은 $\frac{1}{1-\cos^2 x}$이다. 즉

$\frac{1}{1-\cos^2 x}=2$에서 $2-2\cos^2 x=1$, $2\cos^2 x=1$

$\cos^2 x=\frac{1}{2}$ $\therefore \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

7-1 Action $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴 ⇨ $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

$a_{n+1}-a_n=2(n+1)$에서 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 고 하면 $b_n=2(n+1)$이므로

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2(k+1)=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$

$=2+2\times\frac{n(n-1)}{2}+2(n-1)$

$=n^2+n=n(n+1)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

7-2 Action $a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴 ⇨ $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$

$2a_{n+1}=a_n+1$에서 $a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1)$이고, 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=-\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n-1=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore a_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

참고

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$을 $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$, 즉 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{\alpha}{2}$와 비교하면 $\alpha=1$이다.

$\therefore a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1)$

실력 특강 **확인 02** 본문 270 쪽

(1) $0.\dot{x}=\frac{x}{9}$, $0.0\dot{x}=\frac{x}{90}$에서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\frac{x}{9}$, 공비는 $\frac{x}{90}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{x}{9}}{1-\frac{x}{90}}=\frac{10x}{90-x}$

즉 $\frac{10x}{90-x}=\frac{10}{9}$이므로

$9x=90-x$, $10x=90$ $\therefore x=9$

(2) $\frac{12}{99}=0.\dot{1}\dot{2}$이므로 수열 $\{a_n\}$을 나열해 보면 $\{a_n\}$: 1, 2, 1, 2, $\cdots$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots$

$=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^3}+2\cdot\frac{1}{2^5}+\cdots$

$=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$

8-1 Action 되풀이되는 도형 문제의 규칙이 무한등비급수일 때는 첫째항과 공비를 구한다.

점 P_n의 x좌표를 x_n이라고 하면

$x_1=0$

$x_2=x_1+\overline{P_1P_2}\sin 60^\circ$

$=0+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3=x_2+\overline{P_2P_3}\sin 60^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$x_4=x_3+\overline{P_3P_4}\sin 60^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}$

.....

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\cdots$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

따라서 점 P_n은 x좌표가 $\sqrt{3}$인 점에 가까워진다.

8-2 Action 점 A_1, A_2, A_3, …의 x좌표와 y좌표를 각각 구한다.

점 A_n의 좌표를 (x_n, y_n)으로 놓으면

$\lim_{n\to\infty} x_n=1-\frac{1}{2}\cdot\cos 60^\circ-\frac{1}{4}\cos 60^\circ$

$+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\cos 60^\circ-\frac{1}{32}\cos 60^\circ+\frac{1}{64}-\cdots$

$=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{64}-\cdots$

$=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{256}+\cdots\right)$

$=1-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

$\lim_{n\to\infty} y_n=\frac{1}{2}\sin 60^\circ-\frac{1}{4}\sin 60^\circ+\frac{1}{16}\sin 60^\circ-\frac{1}{32}\sin 60^\circ+\cdots$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{32}-\frac{\sqrt{3}}{64}+\cdots$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{32}+\cdots\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{64}+\cdots\right)$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{8}}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{1-\frac{1}{8}}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{7}-\frac{\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{7}$

따라서 점 A_n은 점 $\left(\frac{5}{7}, \frac{\sqrt{3}}{7}\right)$에 가까워진다.

9-1 Action 색칠한 정사각형의 한 변의 길이를 구한다.

색칠한 정사각형의 둘레의 길이를 큰 순서대로 a_1, a_2, a_3, … 이라고 하면

$a_1=4\times 2=8$, $a_2=4\times 1=4$, $a_3=4\times\frac{1}{2}=2$, …

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots=8+4+2+\cdots=\frac{8}{1-\frac{1}{2}}=\mathbf{16}$

9-2 Action 1 : 1로 내분하는 점은 두 점의 중점이다.

선분 A_nA_{n+1}을 1 : 1로 내분하는 점을 A_{n+2}라고 할 때 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}=\frac{1}{2}\overline{A_nA_{n+1}}$이고, 반원의 호의 길이는 반지름의 길이에 비례하므로 $l_{n+1}=\frac{1}{2}l_n$이다. 이때 $\overline{A_1A_2}=2$에서 $l_1=\pi$이므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 π이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n=\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\pi}{1-\frac{1}{2}}=\mathbf{2\pi}$

10-1 Action 각각의 원의 넓이를 구하여 첫째항과 공비를 찾는다.

원 O_1의 반지름의 길이는 r, 원 O_2의 반지름의 길이는 $\frac{r}{2}$, 원 O_3의 반지름의 길이는 $\frac{r}{4}$, …이고, 각각의 원의 넓이를 S_1, S_2, S_3, …이라고 하면

$S_1=\pi r^2$, $S_2=\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2=\pi r^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $S_3=\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2=\pi r^2\left(\frac{1}{2}\right)^4$, …

$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots=\pi r^2+\pi r^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\pi r^2\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots$

$=\frac{\pi r^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\mathbf{\frac{4}{3}\pi r^2}$

10-2 Action 각 삼각형의 넓이를 구하여 첫째항과 공비를 찾는다.

정삼각형 B_1BA_1을 S_1, 정삼각형 $B_2B_1A_3$을 S_2라 하면 정삼각형 S_1의 한 변의 길이는 $\frac{1}{3}$이므로 S_1의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{36}$이다.

또, 정삼각형 S_1의 한 변의 길이의 2배가 정삼각형 S_2의 한 변의 길이의 3배와 일치하므로 S_1, S_2의 닮음비는 3 : 2이고, S_1, S_2의 넓이의 비는 9 : 4이다.

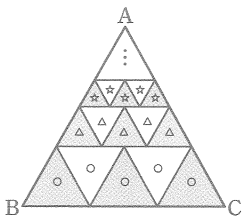
따라서 구하는 넓이는 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{36}\times 3$, 공비가 $\frac{4}{9}$인 무한등비급수의 합이므로

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{36}\times 3}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{12}}{\frac{5}{9}}=\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{20}}$

다른 풀이

$\triangle ABC$의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이고, 색칠한 부분의 넓이는 $\triangle ABC$의 넓이의 $\frac{3}{5}$이므로 구하는 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3\sqrt{3}}{20}$



기본강화 본문 274~276쪽

01 Action 부분합 S_n을 구한 후 $\lim_{n\to\infty}S_n$을 구한다.

제 n 항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left\{1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}=\frac{1}{4}$

02 Action n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 생각한다.

수열 $1, -1, 1, -1, \cdots$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은

$S_1=1, S_2=0, S_3=1, S_4=0, \cdots$

(i) $n=2k-1(k=1, 2, 3, \cdots)$일 때

$S_1+S_2+\cdots+S_{2k-1}=k$이므로

(주어진 식)$=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2k-1}=\frac{1}{2}$

(ii) $n=2k(k=1, 2, 3, \cdots)$일 때

$S_1+S_2+\cdots+S_{2k}=k$이므로

(주어진 식)$=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2k}=\frac{1}{2}$

(i), (ii)로부터

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}=\frac{1}{2}$

평가원 기출

03 Action 이차방정식을 푼 다음 무한급수의 성질을 이용한다.

$(4n^2-1)x^2-4nx+1=0$에서

$\{(2n-1)x-1\}\{(2n+1)x-1\}=0$

$\therefore x=\frac{1}{2n-1}$ 또는 $x=\frac{1}{2n+1}$

이때 $\alpha_n>\beta_n$이고 n은 자연수이므로

$\alpha_n=\frac{1}{2n-1}, \beta_n=\frac{1}{2n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

04 Action $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$을 이용한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n)=18$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}3a_n+\sum_{n=1}^{\infty}2b_n=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

즉 $3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=18$이고, 이때 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=6$이므로

$3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\times6=18$, $3\sum_{n=1}^{\infty}a_n=6$ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$

평가원 기출

05 Action 무한등비수열이 수렴, 발산할 때의 공비의 값을 따져 본다.

무한등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r_1,

무한등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공비를 r_2라고 하면

$a_n=ar_1^{n-1}$, $b_n=br_2^{n-1}$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로

$-1<r_1<1$, $-1<r_2<1$

이때 $a_nb_n=ar_1^{n-1}\cdot br_2^{n-1}=ab(r_1r_2)^{n-1}$에서

$-1<r_1r_2<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$도 수렴한다. (참)

ㄴ. (반례) $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n-1}$이라고 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산하지만

$a_n+b_n=(-1)^n+(-1)^{n-1}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n{}^3$이 수렴하므로 $-1<r_1{}^3<1$, $-1<r_2{}^3<1$

$\therefore -1<r_1<1$, $-1<r_2<1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하고

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

06 Action 삼진법의 수를 분수 꼴로 바꾸어 나타낸다.

수열 $1.1_{(3)}$, $1.11_{(3)}$, $1.111_{(3)}$, …의 각 항을 a_1, a_2, a_3, …이라고 하자. 이때

$a_1=1.1_{(3)}=1+\frac{1}{3}$

$a_2=1.11_{(3)}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}$

$a_3=1.111_{(3)}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}$

⋮

$a_n=1.\underbrace{111\cdots1}_{n개}{}_{(3)}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

LECTURE p진법의 수를 10진법의 수로 나타내기

p진법으로 나타내어진 수를 10진법의 수로 나타내면 다음과 같다.

(i) 1보다 큰 수일 때

10진법의 수 54321은

$5\times10^4+4\times10^3+3\times10^2+2\times10+1$을 나타낸다. 이와 같이 p진법으로 나타내어진 수도 10진법의 수로 다음과 같이 나타낼 수 있다. 예를 들어

$54321_{(6)}=5\times6^4+4\times6^3+3\times6^2+2\times6+1$

즉 a_n이 $0\le a_n<p$인 정수일 때

$a_na_{n-1}\cdots a_2a_{1(p)}=a_n\times p^{n-1}+a_{n-1}\times p^{n-2}+\cdots+a_2\times p+a_1$

(ii) 1보다 작은 수일 때

10진법의 수 0.1234는

$1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{10^2}+3\times\frac{1}{10^3}+4\times\frac{1}{10^4}$을 나타낸다. 이와 같이 p진법으로 나타내어진 수도 10진법의 수로 다음과 같이 나타낼 수 있다. 예를 들어

$0.12345_{(6)}=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6^2}+3\times\frac{1}{6^3}+4\times\frac{1}{6^4}+5\times\frac{1}{6^5}$

즉 a_n이 $0\le a_n<p$인 정수일 때

$0.a_1a_2\cdots a_{n(p)}=a_1\times\frac{1}{p}+a_2\times\frac{1}{p^2}+\cdots+a_n\times\frac{1}{p^n}$

07 Action 무한등비급수의 합 공식 $S=\frac{a}{1-r}$를 이용한다.

$1+x+x^2+x^3+\cdots=2$에서

$\frac{1}{1-x}=2$, $2(1-x)=1$ $\therefore x=\frac{1}{2}$

이때 $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=S$로 놓으면

$S=1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots$ …… ㉠

이 식의 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하면

$\frac{1}{2}S=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots$ …… ㉡

㉠−㉡에서

$\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

$\therefore S=4$

08 Action $\sum_{x=n}^{n+m}\left(\frac{1}{2}\right)^x$에 x 대신에 n, $n+1$, …, $n+m$을 대입해 본다.

$\lim_{m\to\infty}\sum_{x=n}^{n+m}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+m}+\cdots$

은 첫째항이 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 무한등비급수이므로

$\lim_{m\to\infty}\sum_{x=n}^{n+m}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{x=n}^{n+m}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 구하는 값은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 무한등비급수의 합이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

09 Action $a_na_{n+2}=a_{n+1}{}^2$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

$a_na_{n+2}=a_{n+1}{}^2$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다. 이때 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=20$에서 $\frac{a}{1-r}=20$이고

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=-a+ar-ar^2+\cdots=\frac{-a}{1-(-r)}=-\frac{a}{1+r}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2=a^2+a^2r^2+a^2r^4+\cdots=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a^2}{(1+r)(1-r)}$

이므로

$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2}{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n}=\frac{\frac{a^2}{(1+r)(1-r)}}{-\frac{a}{1+r}}=-\frac{a}{1-r}=-20$

10 Action 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항과 공비를 구한다.

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$\therefore a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n,\ b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\ b_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3+3=\mathbf{6}$

11 Action 무한등비급수의 합 공식 $S=\frac{a}{1-r}$를 이용한다.

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2라고 하면 두 수열의 첫째항이 모두 1이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$에서 $\frac{1}{1-r_1}=2,\ 1-r_1=\frac{1}{2}$ $\therefore r_1=\frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{3}{2}$에서 $\frac{1}{1-r_2}=\frac{3}{2},\ 1-r_2=\frac{2}{3}$ $\therefore r_2=\frac{1}{3}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2$

$=\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2-2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n+\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2$

$=\frac{1^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}-2\cdot\frac{1\cdot1}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}+\frac{1^2}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$=\frac{4}{3}-\frac{12}{5}+\frac{9}{8}=\frac{160-288+135}{120}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{120}}$

참고

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로

${a_n}^2=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},\ {b_n}^2=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{n-1}=\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1},$

$a_nb_n=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

주의

다음과 같이 풀지 않도록 한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2-2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n+\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2$

$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=2\times2-2\times2\times\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$

수능 기출

12 Action 무한등비급수의 합 $S=\frac{a}{1-r}$를 이용한다.

무한등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공비를 r,
무한등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b_1, 공비를 r라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=8$에서 $\frac{a_1}{1-r}=8$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=6$에서 $\frac{b_1}{1-r}=6$ …… ㉡

㉠−㉡에서 $\frac{a_1-b_1}{1-r}=2$

이때 $a_1-b_1=1$이므로 $\frac{1}{1-r}=2$에서 $1-r=\frac{1}{2}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $a_1=8(1-r)=8\times\frac{1}{2}=4$

이 값을 ㉡에 대입하면 $b_1=6(1-r)=6\times\frac{1}{2}=3$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 12, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{12}{1-\frac{1}{4}}=\mathbf{16}$

13 Action $a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴 ⇨ $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$로 변형한다.

$a_1=9-9\times\frac{1}{3}+1=7$이고,

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1$에서 $a_{n+1}-3=\frac{2}{3}(a_n-3)$

이때 수열 $\{a_n-3\}$은 첫째항이 $a_1-3=4$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로 $a_n-3=4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{4}{1-\frac{2}{3}}=\mathbf{12}$

평가원 기출

14 Action 직선 $y=\frac{1}{3}x+1$ 위의 점 중에서 y좌표가 자연수이려면 x좌표는 3의 배수이어야 한다.

직선 $x-3y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+1$위의 점 중에서 y좌표가 자연수이려면 x좌표는 3의 배수이어야 한다.

따라서 $x=3n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$으로 놓으면 $y=n+1$에서

$a_n=3n,\ b_n=n+1$

따라서 $\frac{1}{a_nb_n}=\frac{1}{3n(n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

수능 기출

15 Action 피타고라스의 정리를 이용하여 공통현의 길이 l_n을 구한다.

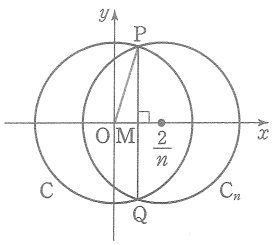
오른쪽 그림에서 $\triangle POM$은 직각삼각형이고 $\overline{OP}=1$,

$\overline{OM}=\frac{1}{n}$이므로

$\overline{PM}=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$

이때 $l_n=2\overline{PM}$이므로

$l_n=2\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$이고



$(nl_n)^2=n^2l_n^2=n^2\left(2\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)^2$

$=n^2\times4\times\frac{n^2-1}{n^2}=4(n^2-1)$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{4(k^2-1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{4(k+1)(k-1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

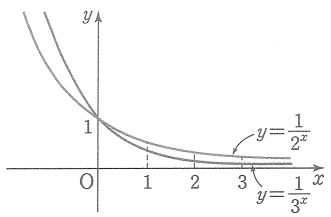
$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}$

따라서 $p=16$, $q=3$이므로 $p+q=16+3=\mathbf{19}$

16 Action 무한등비급수의 합 공식 $S=\frac{a}{1-r}$를 이용한다.

다음 그림과 같이 $x>0$일 때 $\frac{1}{2^x}>\frac{1}{3^x}$이다.



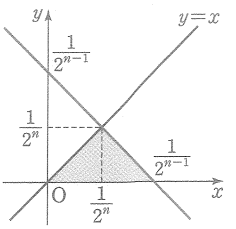
따라서 $l_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

17 Action $\frac{1}{2^{n-1}}$을 1보다 작은 양수라고 생각한다.

오른쪽 그림에서 색칠한 삼각형의 밑변의 길이는 $\frac{1}{2^{n-1}}$이다.



또 두 직선 $y=x$와 $y=-x+\frac{1}{2^{n-1}}$의 교점의 y좌표는

$y=-y+\frac{1}{2^{n-1}}$ $\therefore y=\frac{1}{2^n}$

이때 삼각형의 넓이 S_n은

$S_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-1}}\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{4^n}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$

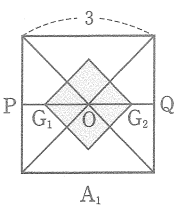
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$

평가원 기출

18 Action 정사각형 A_1과 A_2를 이용하여 닮음비를 찾는다.

오른쪽 그림과 같이 정사각형 A_1에서 두 대각선의 교점을 O, 4개의 직각이등변삼각형 중 2개의 직각이등변삼각형의 무게중심을 각각 G_1, G_2라 하면 5개의 점 P, G_1, O, G_2, Q는 일직선 위에 있고 $\overline{PG_1}:\overline{G_1O}=1:2$,

$\overline{OG_2}:\overline{G_2Q}=2:1$이다.



따라서 $\overline{G_1G_2}=\frac{2}{3}\overline{PQ}$이고, 이때 $\overline{PQ}=3$이므로

$\overline{G_1G_2}=\frac{2}{3}\overline{PQ}=2$

정사각형 A_1, A_2에서 대각선의 길이의 비가 $3\sqrt{2}:2$이므로 넓이의 비는 $(3\sqrt{2})^2:2^2=9:2$이다.

따라서 정사각형 A_n의 넓이 S_n은 첫째항이 9, 공비가 $\frac{2}{9}$인 등비수열을 이루므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{9}{1-\frac{2}{9}}=\frac{81}{7}$

19 Action 모서리의 길이가 a인 정육면체의 부피 V는 $V=a^3$

모서리의 길이가 a인 정육면체의 부피는 a^3이므로

$V_1=1$, $V_2=\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $V_3=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^3$, $\cdots$

$\therefore V_1+V_2+V_3+\cdots=1+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$

$=\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{27}{19}$

20 Action 반지름의 길이가 r인 구의 부피 V는 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

n회 분열 후 생성되는 버섯균의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $r^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, …

n회 분열 후 모든 버섯균의 부피를 V_n이라고 하면

$V_1=\frac{4}{3}\pi+2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$V_2=V_1+2\cdot2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2^2}\right)^3$

$=\frac{4}{3}\pi+2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+2^2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2^2}\right)^3$

……

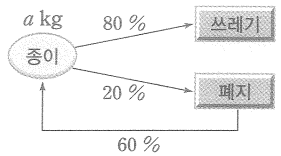
따라서 버섯균 한 개가 계속 분열을 할 때, 모든 버섯균의 부피의 합 V는

$V=\frac{4}{3}\pi+2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+2^2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2^2}\right)^3+\cdots$

$=\frac{4}{3}\pi\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\right\}$

$=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{9}\pi$

21 Action 종이 a가 처음으로 재생산되는 과정에서 발생되는 종이의 양은 $a\times0.2\times0.6$이다.



생산된 종이 a kg을 전부 사용하고 난 후 20 %의 폐지를 수거하므로 그 양은 $a\times0.2$이고, 이에 대하여 생산되는 종이의 양은 60 %이므로 처음으로 재생산되는 과정에서 발생하는 종이의 양은 $(a\times0.2\times0.6)$kg이다.

또 종이 $(a\times0.2\times0.6)$kg에 대하여 생산되는 종이의 양은

$(a\times0.2\times0.6)\times0.2\times0.6=a\times(0.2\times0.6)^2$

이러한 재생산 과정이 무한히 되풀이 된다면

$a+a\times(0.2\times0.6)+a\times(0.2\times0.6)^2+\cdots$

$=\frac{a}{1-(0.2\times0.6)}=\frac{a}{0.88}\fallingdotseq1.136a$

따라서 생산된 종이를 사용한 후 전부 쓰레기로 버리는 것보다 종이를 재생산했을 때 약 **13.6 %**의 자원 활용 효과를 기대할 수 있다.